Mathématiques
Voies S et E

Corrigés des épreuves du concours HEC 2008

Jean Mallet
Professeur en classes préparatoires, lycée Montaigne (Paris)

Michel Miternique
Professeur en classes préparatoires, lycée Jean-Baptiste Corot (Savigny sur Orge) et IPESUP (Paris)

Voie scientifique

BCE

BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : **l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans tout le problème, n et p désignent deux entiers vérifiant $1 \leqslant p \leqslant n$. On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. La transposée d'une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est notée ${}^tA$. Lorsqu'une matrice A est inversible, on note A^{-1} son inverse.
Dans tout le problème, on identifie les deux espaces vectoriels $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$) et $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$), c'est-à-dire qu'on identifie un vecteur (point) de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) avec le vecteur-colonne de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$).
On munit $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$) de sa structure euclidienne canonique, et pour tous vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^p$), on note $\langle u, v\rangle = {}^tuv$ leur produit scalaire, et $||u||$ la norme de u associée.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note f_i une fonction définie sur $\mathbb{R}^p$ à valeurs réelles, et de classe C^2 sur $\mathbb{R}^p$. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles, par : $F(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}[f_i(x_1, x_2, \ldots, x_p)]^2$.

Autrement dit, si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est un point de $\mathbb{R}^p$, on a : $F(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i^2(X) = \frac{1}{2}||f(X)||^2$, en notant $f(X)$ le vecteur $(f_1(X), \ldots, f_n(X))$.

Le problème a pour objet l'étude de quelques aspects mathématiques liés à la recherche du minimum de la fonction F.

Partie I. Gradient et hessienne

Pour tout point $X = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on rappelle que :

- le *gradient* de F au point X, noté $\nabla F(X)$, est le vecteur de $\mathbb{R}^p$ suivant :

$$\nabla F(X) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(X), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_p}(X)\right)$$

Mathématiques

- la *matrice hessienne* de F au point X, notée $\nabla^2 F(X)$, est la matrice symétrique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ suivante :

$$\nabla^2 F(X) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j}(X)\right)_{1\leqslant k,j\leqslant p}$$

Pour tout point $X = (x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on note $J(X)$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par :

$$J(X) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X)\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$$

dans laquelle i désigne l'indice de ligne et j l'indice de colonne. On pose : $G(X) = {}^tJ(X)J(X)$.

Si X est un point de $\mathbb{R}^p$ vérifiant $\nabla F(X) \neq 0$, on dit qu'un vecteur h de $\mathbb{R}^p$ est *une direction de décroissance* de F en X, si on a : $\langle \nabla F(X), h\rangle < 0$.

Dans les trois exemples suivants, on suppose que p est égal à 2.

1. *Un premier exemple.*
On considère les deux fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}^2$ par : $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2 + 1$, et $f_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2^2 + 1$.

a) Justifier que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Calculer, en tout point (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, le gradient $\nabla F(x_1, x_2)$.

b) Montrer que le système d'équations qui permet de déterminer les éventuels points critiques de F, peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 = 0 \\ (x_1 - x_2)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3) = 0 \end{cases}$$

c) Établir, pour tout (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, l'inégalité : $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3 > 0$. En déduire que l'unique point critique de F est $(-1/2, -1/2)$.

d) Déterminer, en tout point (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, la matrice hessienne $\nabla^2 F(x_1, x_2)$. En déduire que F admet un minimum local en $(-1/2, -1/2)$.

e) On note pour tout point X de $\mathbb{R}^2$, $\nabla^2 f_1(X)$ et $\nabla^2 f_2(X)$ respectivement, les matrices hessiennes de f_1 et f_2 au point X. Préciser la matrice $J(X)$. Exprimer ${}^tJ(X)f(X)$ et $G(X) + \sum_{i=1}^{2} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)$ en fonction de $\nabla F(X)$ et $\nabla^2 F(X)$ respectivement.

2. *Un deuxième exemple.*
Soit $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ et $c = (c_1, \ldots, c_n)$ trois vecteurs non nuls donnés de $\mathbb{R}^n$, tels que la famille (a, b) soit libre.
Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la fonction f_i est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f_i(x_1, x_2) = a_ix_1 + b_ix_2 - c_i$.

a) Exprimer, pour tout point (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, le gradient $\nabla F(x_1, x_2)$ à l'aide de $x_1, x_2, ||a||, ||b||, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle$ et $\langle b, c\rangle$.

b) Justifier l'inégalité : $||a||^2 \times ||b||^2 - \langle a, b\rangle^2 > 0$. En déduire que la fonction F possède un unique point critique $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$.
Exprimer $\widehat{x_1}$ et $\widehat{x_2}$ en fonction de $||a||, ||b||, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle$ et $\langle b, c\rangle$.

c) Calculer, en tout point (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, la matrice hessienne $\nabla^2 F(x_1, x_2)$; en déduire que F admet un minimum local en $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$.

d) En utilisant la structure euclidienne de $\mathbb{R}^n$, montrer que F admet un minimum global en $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$.

3. *Un troisième exemple.*

On suppose que $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont n réels donnés non tous égaux. On note $\bar{c}$ et s^2 respectivement, la moyenne arithmétique et la variance de la série statistique $(c_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, la fonction f_i est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f_i(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - c_i$.

a) Déterminer les points critiques de F.

b) Soit $(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$ un point critique de F. Exprimer $F(\widehat{x_1}, \widehat{x_2})$ en fonction de s^2. Montrer, pour tout (x_1, x_2) de $\mathbb{R}^2$, l'égalité : $F(x_1, x_2) - F(\widehat{x_1}, \widehat{x_2}) = \frac{n}{2}(x_1 + x_2 - \bar{c})^2$.

c) En déduire la nature des points critiques de F. Ce résultat était-il prévisible ?

4. *Retour au cas général.*
Soit $X = (x_1, \ldots, x_p)$ un point de $\mathbb{R}^p$.

a) Exprimer $\nabla F(X)$ en fonction de ${}^tJ(X)$ et de $f(X)$.

b) Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on note $\nabla^2 f_i(X)$ la matrice hessienne de f_i au point X.
Établir la formule : $\nabla^2 F(X) = G(X) + \sum_{i=1}^{n} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)$.

Partie II. Une approximation de F

Dans cette partie, on conserve les définitions et les notations de la partie I, et on suppose que X est un vecteur **fixé** de $\mathbb{R}^p$ vérifiant : $\nabla F(X) \neq 0$.
Pour tout vecteur $h = (h_1, h_2, \ldots, h_p)$ de $\mathbb{R}^p$, on pose : $\ell(h) = f(X) + J(X)h$ et $L(h) = \frac{1}{2}||\ell(h)||^2$.

1. Établir, pour tout h de $\mathbb{R}^p$, l'égalité : $L(h) = F(X) + {}^th\nabla F(X) + \frac{1}{2}{}^th\, G(X)h$.

2. Soit P une matrice symétrique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
a) Justifier que P est diagonalisable.
b) On note $\theta_1, \ldots, \theta_p$ les valeurs propres de P, et on pose : $\theta = \max_{1\leqslant j\leqslant p} |\theta_j|$. Montrer, pour tout vecteur h de $\mathbb{R}^p$, l'inégalité suivante : $|{}^thPh| \leqslant \theta||h||^2$.

3. a) Écrire un développement limité à l'ordre 2 de la fonction F au point X.
b) En déduire, à l'aide de la question 2.b, que l'on a : $\lim_{||h||\to 0} \dfrac{F(X+h) - L(h)}{||h||} = 0$.
Pour X fixé de $\mathbb{R}^p$, on dit que $L(h)$ est une approximation à l'ordre 2 de $F(X+h)$ lorsque $||h||$ tend vers 0.

4. On note : $G(X) = (g_{i,j}(X))_{1\leqslant i,j\leqslant p}$. Soit φ_1 et φ_2 deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^p$ par : $\varphi_1(h) = {}^th\nabla F(X)$ et $\varphi_2(h) = {}^thG(X)h$.
a) Montrer que pour tout j de $[\![1, p]\!]$, on a : $\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial h_j}(h) = \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(X)$ et $\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial h_j}(h) = 2\sum_{i=1}^{p} g_{i,j}(X)h_i$.
b) En déduire que le gradient $\nabla L(h)$ de L en h, est donné par : $\nabla L(h) = \nabla F(X) + G(X)h$.
c) Soit $\nabla^2 L(h)$ la matrice hessienne de L en h. Établir la formule : $\nabla^2 L(h) = G(X)$.

5. Soit J une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
a) Montrer que la matrice ${}^tJJ$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives ou nulles.
b) Montrer que lorsque la matrice ${}^tJJ$ est inversible, le rang de la matrice J est égal à p.

6. Montrer que si la fonction L admet des points critiques $\widehat{h}$, alors ceux-ci vérifient l'inéquation : $\langle \widehat{h}, \nabla F(X)\rangle \leqslant 0$.

7. On suppose que la matrice $G(X)$ est inversible.
a) Montrer que L admet un unique point critique $\widehat{h}$ donné par : $\widehat{h} = -(G(X))^{-1} \times {}^tJ(X)f(X)$.
b) Établir que $\widehat{h}$ est une direction de décroissance de F en X. En déduire que L admet un minimum local en $\widehat{h}$.

Partie III. Une décomposition d'une matrice rectangulaire

Afin de réduire les inconvénients liés à l'inversion de la matrice $G(X)$, on remplace celle-ci par la matrice $G(X) + \mu I$, où μ désigne un paramètre réel strictement positif, et I la matrice identité d'ordre p. Certains résultats d'algèbre linéaire permettent alors de substituer à l'inversion d'une matrice, le calcul plus simple d'une somme de matrices.

Soit J une matrice non nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice V orthogonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, un entier q tel que $1 \leqslant q \leqslant p$, et des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ tels que $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_q > 0$, qui vérifient l'égalité : ${}^tV\,{}^tJJV = D$, où $D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ est définie par : $d_{i,i} = \lambda_i$ si $1 \leqslant i \leqslant q$, et $d_{i,j} = 0$ sinon. Si $q < p$, on pose : $\lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_p = 0$.
Pour tout i de $[\![1,p]\!]$, on note V_i la i-ième colonne de V.

2. a) Montrer que le rang de ${}^tJJ$ est égal à q.

b) Montrer que, pour tout i de $[\![1,q]\!]$, JV_i est un vecteur propre de la matrice $J\,{}^tJ$ associé à la valeur propre λ_i. En déduire que les matrices ${}^tJJ$ et $J\,{}^tJ$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

c) Soit $(Y_1, \dots, Y_r)$ une base du sous-espace propre de ${}^tJJ$ associée à une valeur propre λ non nulle. Montrer que la famille $(JY_1, \dots, JY_r)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

d) En déduire que les sous-espaces propres de ${}^tJJ$ et de $J\,{}^tJ$ associés à la même valeur propre non nulle sont de même dimension, et que le rang de $J\,{}^tJ$ est égal à q.

3. On pose, pour tout i de $[\![1,q]\!]$: $U_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} JV_i$.

a) Montrer que la famille $(U_1, \dots, U_q)$ est une famille orthonormée de vecteurs propres de $J\,{}^tJ$.

b) En déduire qu'il existe une base orthonormée $(U_1, \dots, U_q, U_{q+1}, \dots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de $J\,{}^tJ$.

4. On note U la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la i-ième colonne de U est la matrice-colonne U_i de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soit $S = (s_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par : $s_{i,i} = \sqrt{\lambda_i}$ si $1 \leqslant i \leqslant p$ et $s_{i,j} = 0$ sinon.
Établir l'égalité matricielle suivante : $S = {}^tUJV$. En déduire l'égalité : $J = US\,{}^tV$.

5. a) Montrer que la matrice $({}^tJJ + \mu I)$ est inversible.

b) On note $R = (r_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ définie par : $r_{i,i} = \dfrac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i + \mu}$ si $1 \leqslant i \leqslant p$ et $r_{i,j} = 0$ sinon.
Établir la formule suivante : $({}^tJJ + \mu I)^{-1} \times {}^tJ = VR\,{}^tU$.

c) En déduire l'égalité : $({}^tJJ + \mu I)^{-1} \times {}^tJ = \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\lambda_i + \mu} V_i\,{}^tU_i$

6. Soit X un vecteur **fixé** de $\mathbb{R}^p$ vérifiant : $\nabla F(X) \neq 0$.
Pour tout vecteur h de $\mathbb{R}^p$, on pose : $M(h) = L(h) + \dfrac{\mu}{2}||h||^2$.

a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{||h||\to 0} \frac{F(X+h) - M(h)}{||h||} = 0$.

b) Calculer, pour tout h de $\mathbb{R}^p$, le gradient $\nabla M(h)$ et la matrice hessienne $\nabla^2 M(h)$ de M en h.

c) En appliquant les résultats des questions précédentes à la matrice $J(X)$, montrer que M admet un unique point critique $h^\star$. Donner une expression de $h^\star$ qui utilise les résultats de la question 5.c.

d) Montrer que M admet un minimum local en $h^\star$.

À partir de ce minimum local $h^\star$ de M (ou du minimum local $\widehat{h}$ de L), on pourrait utiliser une méthode algorithmique permettant, sous certaines conditions, d'approcher avec une précision donnée un minimum local de la fonction F

Exemple 1

a)

Les applications f_1 et f_2 sont des applications polynomiales définies sur $\mathbb{R}^2$, elles sont donc de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

$F(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(f_1^2(x_1,x_2) + f_2^2(x_1,x_2))$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} f_1(x_1,x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} f_2(x_1,x_2)\\
&= 2x_1(x_1^2 + x_2 + 1) + (x_1 + x_2^2 + 1)\\
&= 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_2} f_1(x_1,x_2) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} f_2(x_1,x_2)\\
&= (x_1^2 + x_2 + 1) + 2x_2(x_1 + x_2^2 + 1)\\
&= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^3 + 3x_2 + 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla F(x_1,x_2) = (2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1, x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^3 + 3x_2 + 1)}$$

b)

(x_1,x_2) est un point critique de F si et seulement si $\nabla F(x_1,x_2) = 0$

$$\nabla F(x_1,x_2) = 0 \iff \begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 &= 0\\ x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^3 + 3x_2 + 1 &= 0 \quad L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 &= 0\\ 2(x_2^3 - x_1^3) + x_1^2 - x_2^2 + 3(x_2 - x_1) &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 &= 0\\ (x_2 - x_1)(2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (x_1 + x_2) + 3 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1^3 + 2x_1x_2 + 3x_1 + x_2^2 + 1 &= 0 \quad \textbf{(1)}\\ (x_2 - x_1)(2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3) &= 0 \quad \textbf{(2)} \end{cases}$$

c)

Considérons $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3 = 2x_1^2 + x_1(2x_2 - 1) + 2x_2^2 - x_2 + 3$ comme un trinôme en x_1. Son discriminant Δ vaut $(2x_2 - 1)^2 - 8(2x_2^2 - x_2 + 3) = -12x_2^2 + 4x_2 - 23$. Il est alors immédiat que le discriminant de ce nouveau trinôme est négatif ; ce trinôme reste strictement négatif , $\Delta < 0$, d'où $(2x_2 - 1)^2 - 8(2x_2^2 - x_2 + 3) = -12x_2^2 + 4x_2 - 23 = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3 > 0$

Le trinôme $2x_1^2 + x_1(2x_2 - 1) + 2x_2^2 - x_2 + 3$ n'a pas de racines réelles ; il est donc constamment du signe du coefficient de x_1^2 :

$$\forall (x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2,\ 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 + 3 > 0.$$

L'équation **(2)** donne $x_1 = x_2$ et l'équation **(1)** s'écrit alors $2x_1^3 + 3x_1^2 + 3x_1 + 1 = 0$.

Etudions le polynôme P défini par $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

$P'(x) = 3(2x^2 + 2x + 1)$; $\forall x \in \mathbb{R},\ P'(x) > 0$ car son discriminant $\delta = -4$.

On en déduit que P est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car P est continue, strictement croissante).

Conclusion : P admet une unique racine réelle ; on constate facilement que $P(-\frac{1}{2}) = 0$

Finalement l'équation $\nabla F(x_1,x_2)=0$ admet une unique solution $(x_1,x_2)=(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ admet un point critique et un seul } (-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}).}$$

d)

La fonction F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$, on peut donc appliquer le théorème Schwarz.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) &= 6x_1^2+2x_2+3\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 F}{\partial x_2\partial x_1}(x_1,x_2) &= 2x_1+2x_2\\
\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) &= 2x_1+6x_2^2+3
\end{aligned}$$

On a alors $\nabla^2 F(x_1,x_2)=\begin{pmatrix}6x_1^2+2x_2+3 & 2x_1+2x_2\\ 2x_1+2x_2 & 2x_1+6x_2^2+3\end{pmatrix}$.

Au point critique, $\nabla^2 F(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & -2\\ -2 & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$

$(s^2-rt)(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})=4-\frac{49}{4}=-\frac{33}{4}<0$ et $r>0$.

$$\boxed{\text{La fonction } F \text{ admet au point } (-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) \text{ un minimum local}}$$

e)

- $J(X)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1 & 1\\ 1 & 2x_2\end{pmatrix}$

On remarque que ${}^tJ(X)=J(X)$.

$$\begin{aligned}
{}^tJ(X)f(X) &= \begin{pmatrix}2x_1 & 1\\ 1 & 2x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_1(X)\\ f_2(X)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2x_1 & 1\\ 1 & 2x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^2+x_2+1\\ x_1+x_2^2+1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2x_1^3+2x_1x_2+3x_1+x_2^2+1\\ 2x_2^3+2x_1x_2+3x_2+x_1^2+1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On remarque que } {}^tJ(X)f(X)=\nabla F(X) \text{ puiqu'on a identifié } \mathbb{R}^2 \text{ et } \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})}$$

- $G(X)={}^tJ(X)J(X)=\begin{pmatrix}4x_1^2+1 & 2x_1+2x_2\\ 2x_1+2x_2 & 4x_2^2+1\end{pmatrix}$

$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(X)=2$; $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2\partial x_1}$ (d'après Schwarz) $=0$; $\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(X)=0$; donc

$$\boxed{\nabla^2 f_1(X)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}$$

$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2}(X)=0$; $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2\partial x_1}$ (d'après Schwarz) $=0$; $\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(X)=2$; donc

$$\boxed{\nabla^2 f_1(X)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}}$$

-

$$\begin{aligned}
G(X)+\sum_{i=1}^{2}f_i(X)\nabla^2 f_i(X) &= \begin{pmatrix}4x_1^2+1 & 2x_1+2x_2\\ 2x_1+2x_2 & 4x_2^2+1\end{pmatrix}+(x_1^2+x_2+1)\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
&\quad +(x_1+x_2^2+1)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}4x_1^2+1+2x_1^2+2x_2+2 & 2x_1+2x_2\\ 2x_1+2x_2 & 4x_2^2+1+2x_1+2x_2^2+2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}6x_1^2+2x_2+3 & 2x_1+2x_2\\ 2x_1+2x_2 & 6x_2^2+2x_1+3\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{G(X)+\sum_{i=1}^{2}f_i(X)\nabla^2 f_i(X)=\nabla^2 F(X)}$$

Exemple 2

a)

$$\begin{aligned}
F(x_1,x_2) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_ix_1+b_ix_2-c_i)^2\\
\frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1,x_2) &= \sum_{i=1}^{n}a_i(a_ix_1+b_ix_2-c_i)=x_1\sum_{i=1}^{n}a_i^2+x_2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i-\sum_{i=1}^{n}a_ic_i\\
&= ||a||^2x_1+\langle a,b\rangle x_2-\langle a,c\rangle\\
\frac{\partial F}{\partial x_2}(x_1,x_2) &= \sum_{i=1}^{n}b_i(a_ix_1+b_ix_2-c_i)=x_1\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+x_2\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\sum_{i=1}^{n}b_ic_i\\
&= \langle a,b\rangle x_1+||b||^2x_2-\langle b,c\rangle
\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla F(x_1,x_2)=(||a||^2x_1+\langle a,b\rangle x_2-\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle x_1+||b||^2x_2-\langle b,c\rangle)}$$

b)

On sait, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que $|\langle a,b\rangle|\le ||a||||b||$. On sait aussi qu'il y a égalité si et seulement si les vecteurs a et b sont liés. D'après les hypothèses, les vecteurs a et b sont libres, donc l'inégalité est stricte :

$$|\langle a,b\rangle|<||a||||b||,\text{ ce qui équivaut à } \langle a,b\rangle^2<||a||^2||b||^2$$

- Le couple (x_1,x_2) est un point critique de F si et seulement si $\nabla F(x_1,x_2)=0$

$$\nabla F(x_1,x_2)=0 \iff \left\{\begin{aligned} ||a||^2x_1+\langle a,b\rangle x_2 &= \langle a,c\rangle\\ \langle a,b\rangle x_1+||b||^2x_2 &= \langle b,c\rangle \quad L_2\longleftarrow ||a||^2L_2-\langle a,b\rangle L_1\end{aligned}\right.$$

opération permise car $||a||^2\neq 0$

$$\iff \left\{\begin{aligned} ||a||^2x_1 \quad\quad +\langle a,b\rangle x_2 &= \langle a,c\rangle\\ (||a||^2||b||^2-\langle a,b\rangle^2)x_2 &= ||a||^2\langle b,c\rangle-\langle a,b\rangle\langle a,c\rangle\end{aligned}\right.$$

D'après le point précédent, $(||a||^2||b||^2-\langle a,b\rangle^2)>0$.

$$\boxed{\text{Le système est de Cramer : il admet donc une unique solution notée } (\widehat{x_1},\widehat{x_2})}$$

- Calcul de la solution

On a tout de suite $\widehat{x_2}=\dfrac{||a||^2\langle b,c\rangle-\langle a,b\rangle\langle a,c\rangle}{||a||^2||b||^2-\langle a,b\rangle^2}$.

La première ligne du système va donner $\widehat{x_1}$

$$\widehat{x_1} = \frac{1}{||a||^2}\left(\langle a,c\rangle - \langle a,b\rangle \frac{||a||^2\langle b,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle a,c\rangle}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}\right)$$

opération permise car $||a||^2 \neq 0$

$$= \frac{1}{||a||^2}\frac{1}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}\left(\langle a,c\rangle||a||^2||b||^2 - \langle a,c\rangle\langle a,b\rangle^2 - ||a||^2\langle a,b\rangle\langle b,c\rangle + \langle a,b\rangle^2\langle a,c\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{||a||^2}\frac{1}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}\left(||a||^2\left(||b||^2\langle a,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle b,c\rangle\right)\right)$$

D'où les résultats :

$$\boxed{\widehat{x_1} = \frac{||b||^2\langle a,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle b,c\rangle}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2} \text{ et } \widehat{x_2} = \frac{||a||^2\langle b,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle a,c\rangle}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}}$$

c)

$$\nabla^2 F(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1,x_2) \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1,x_2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_1,x_2) \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} ||a||^2 & \langle a,b\rangle \\ \langle a,b\rangle & ||b||^2 \end{pmatrix}$$

$$(s^2 - rt)(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) = \langle a,b\rangle^2 - ||a||^2||b||^2 < 0$$

$$\boxed{(s^2-rt)(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) < 0 \text{ et } r(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) > 0 : F \text{ possède en } (\widehat{x_1},\widehat{x_2}) \text{ un minimum local}}$$

d)

Considérons le vecteur $Y = (Y_1,\ldots,Y_i,\ldots,Y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ où $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $Y_i = (a_i x_1 + b_i x_2 - c_i)$. On constate qu'alors $F(X) = \frac{1}{2}||Y||^2$.

Si l'on considère la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ suivante : $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_i & b_i \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,

on a immédiatement $AX = \begin{pmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 \\ \vdots \\ a_ix_1 + b_ix_2 \\ \vdots \\ a_nx_1 + b_nx_2 \end{pmatrix}$

Introduisons maintenant le vecteur $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient

$$\begin{pmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 - c_1 \\ \vdots \\ a_ix_1 + b_ix_2 - c_i \\ \vdots \\ a_nx_1 + b_nx_2 - c_n \end{pmatrix} = AX - C.$$

$$\boxed{F(X) = \frac{1}{2}||AX - C||^2}$$

- La matrice A est de rang 2 puisque les vecteurs a et b sont libres. D'après le cours sur les moindres carrés, $||AX - C||$ sera minimale pour l'unique vecteur $\widehat{X}$ de $\mathbb{R}^2$ donné par : $\widehat{X} = ({}^tAA)^{-1} \times {}^tAC$.

Vérifions que $\widehat{X} = (\widehat{x_1},\widehat{x_2})$: cela prouvera que le minimum est global.

$${}^tAA = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ||a||^2 & \langle a,b\rangle \\ \langle a,b\rangle & ||b||^2 \end{pmatrix}$$

- Calcul de $({}^tAA)^{-1}$ (on sait que cette matrice existe car A, donc ${}^tA$ sont inversibles) . Pour cela résolvons le système : ${}^tAA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ d'inconnues x et y.

$${}^tAA\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ||a||^2 x + \langle a,b\rangle y = \alpha \\ \langle a,b\rangle x + ||b||^2 y = \beta \end{cases}$$

On a déjà résolu ce système à la question **b)** : il suffit de changer $\langle a,c\rangle$ en α, $\langle b,c\rangle$ en β et x_1 en x, x_2 en y : les formules

$x_1 = \dfrac{||b||^2\langle a,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle b,c\rangle}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}$ et $x_2 = \dfrac{||a||^2\langle b,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle a,c\rangle}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}$ donnent

$x = \dfrac{||b||^2\alpha - \langle a,b\rangle\beta}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}$ et $y = \dfrac{||a||^2\beta - \langle a,b\rangle\alpha}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}$

Matriciellement

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}\begin{pmatrix} ||b||^2 & -\langle a,b\rangle \\ -\langle a,b\rangle & ||a||^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$({}^tAA)^{-1} = \frac{1}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}\begin{pmatrix} ||b||^2 & -\langle a,b\rangle \\ -\langle a,b\rangle & ||a||^2 \end{pmatrix}$$

$${}^tAC = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \\ b_1 & \ldots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a,c\rangle \\ \langle b,c\rangle \end{pmatrix}$$

$$\widehat{X} = \frac{1}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}\begin{pmatrix} ||b||^2 & -\langle a,b\rangle \\ -\langle a,b\rangle & ||a||^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle a,c\rangle \\ \langle b,c\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{||a||^2||b||^2 - \langle a,b\rangle^2}\begin{pmatrix} ||b||^2\langle a,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle b,c\rangle \\ ||a||^2\langle b,c\rangle - \langle a,b\rangle\langle a,c\rangle \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\widehat{X} = \begin{pmatrix} \widehat{x_1} \\ \widehat{x_2} \end{pmatrix} : F \text{ admet en } (\widehat{x_1},\widehat{x_2}) \text{ un minimum global}}$$

Exemple 3

a)

$$F(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_1 + x_2 - c_i)^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_1 + x_2 - c_i) = n(x_1 + x_2 - \overline{c}) \quad \text{car } \overline{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_1 + x_2 - c_i) = n(x_1 + x_2 - \overline{c})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla F(X) = (n(x_1 + x_2 - \overline{c}), n(x_1 + x_2 - \overline{c})) \\ \text{Les points critiques de } F \text{ vérifient : } x_1 + x_2 = \overline{c} \end{array}}$$

b)

Soit $(\widehat{x_1},\widehat{x_2})$ un point critique de F.

$F(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{x_1}+\widehat{x_2}-c_i)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\overline{c}-c_i)^2$. Or par définition, $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{c}-c_i)^2$. Donc

$$\boxed{F(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) = \frac{ns^2}{2}}$$

- $$\begin{aligned} F(x_1,x_2)-F(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_1+x_2-c_i)^2 - \frac{ns^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_1+x_2-\overline{c}+\overline{c}-c_i)^2 - \frac{ns^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_1+x_2-\overline{c})^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\overline{c}-c_i)^2 + \frac{2}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_1+x_2-\overline{c})(\overline{c}-c_i) - \frac{ns^2}{2} \\ &= \frac{n}{2}(x_1+x_2-\overline{c})^2 + \frac{ns^2}{2} + (x_1+x_2-\overline{c})\sum_{i=1}^{n}(\overline{c}-c_i) - \frac{ns^2}{2} \\ &= \frac{n}{2}(x_1+x_2-\overline{c})^2 + (x_1+x_2-\overline{c})\underbrace{\left(n\overline{c}-\sum_{i=1}^{n}c_i\right)}_{=0} \end{aligned}$$

$$\boxed{F(x_1,x_2)-F(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) = \frac{n}{2}(x_1+x_2-\overline{c})^2 \geq 0}$$

c)

On vient de voir que $\forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ F(x_1,x_2)-F(\widehat{x_1},\widehat{x_2}) \geq 0$

$$\boxed{\text{Aux points critiques , } F \text{ orésente des minima globaux}}$$

Il était prévisible que F ne pouvait pas présenter de maximum globaux car $\lim_{x_1\to+\infty} F(x_1,x_2) = +\infty$.

Cas général

a)

Par définition, $\nabla F(X) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(X),\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_p}(X))\right)$.

$$F(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f_i^2(X)$$

$$\forall j\in [\![1,p]\!],\ \frac{\partial F}{\partial x_i}(X) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)f_j(X)$$

Or $J(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(X) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(X) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(X) & \ldots & \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X) & \ldots & \frac{\partial f_i}{\partial x_p}(X) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(X) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(X) \end{pmatrix}$, donc

$${}^tJ(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \ldots & \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(X) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X) & \ldots & \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(X) & \ldots & \frac{\partial f_j}{\partial x_p}(X) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(X) \end{pmatrix}$$

$${}^tJ(X)f(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \ldots & \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(X) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X) & \ldots & \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(X) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_p}(X) & \ldots & \frac{\partial f_j}{\partial x_p}(X) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_p}(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_j(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix}$$

${}^tJ(X)f(X)$ est une colonne dont la i ème ligne est $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)f_j(X)$. Comme on assimile les colonnes aux listes, on peut dire que ${}^tJ(X)f(X)$ est une $n-$liste dont le i ème terme est $\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(X)f_j(X)$. On reconnaît le i ème terme de $\nabla F(X)$

$$\boxed{\nabla F(X) = {}^tJ(X)f(X)}$$

b)

Par définition, $\forall X\in\mathbb{R}^p,\ \nabla^2 F(X) = \left(\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_k\partial x_j}\right) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Cette matrice est symétrique d'après le théorème de Schwarz puisque F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^p$. Explicitons un peu :

La k ème ligne de $\nabla^2 F(X)$ est $\left(\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_k\partial x_1},\ldots,\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_k\partial x_j},\ldots,\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_k\partial x_p}\right)$

D'autre part, pour tout $j\in [\![1;p]\!]$

$\frac{\partial F(X)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}f_i(X)$, donc $\forall (k,j)\in (\ [\![1;p]\!]\ )^2$,

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_k\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_k\partial x_j}f_i(X) \qquad \textbf{(1)}$$

- $\forall i\in [\![1;n]\!],\ \nabla^2 f_i(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_1^2} & \ldots & \ldots & \frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_1\partial x_p} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_p\partial x_1} & \ldots & \ldots & \frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_p^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

$\forall (k,j)\in (\ [\![1;p]\!]\ )^2$, $\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_k\partial x_j}$ est le terme général de $\nabla^2 F(X)$

$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_k}$ est le terme général de ${}^tJ(X)J(X)$

$\frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_k\partial x_j}f_i(X)$ est le terme général de $f_i(X)\nabla^2 f_i(X)$, donc, d'après l'égalité **(1)**, le terme général de $\nabla^2(F(X)$ est égal au terme général de ${}^tJ(X)J(X)$ + la somme, pour $i \in [\![1;n]\!]$, du terme général de $f_i(X)\nabla^2 f_i(X)$

$$\boxed{\text{Conclusion : } \nabla^2(F(X) = {}^tJ(X)J(X) + \sum_{i=1}^{n} f_i(X)\nabla^2 f_i(X) = G(X) + \sum_{i=1}^{n} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)}$$

Partie II

1)

$$\begin{aligned} L(h) &= \frac{1}{2}||l(h)||^2 = \frac{1}{2}{}^tl(h)l(h) \\ &= \frac{1}{2}{}^t(f(X) + J(X)h)(f(X) + J(X)h) \\ &= \frac{1}{2}({}^tf(X) + {}^th{}^tJ(X))(f(X) + J(X)h) \\ &= \frac{1}{2}({}^tf(X)f(X) + {}^tf(X)J(X)h + {}^th{}^tJ(X)f(X) + {}^th{}^tJ(X)J(X)h) \\ &= \frac{1}{2}(||f(X)||^2 + {}^tf(X)J(X)h + {}^th{}^tJ(X)f(X) + {}^thG(X)h) \end{aligned}$$

$J(X) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, donc $J(X)h \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$f(X) = (f_i(X), \dots, f_n(X)) \in \mathbb{R}^n$ que l'on assimile à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; il en résulte que ${}^tf(X)J(X)h \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, donc ${}^tf(X)J(X)h \in \mathbb{R}$.

Même raisonnement pour ${}^th{}^tJ(X)f(X)$. Donc ${}^th{}^tJ(X)f(X) = {}^t\Big({}^th{}^tJ(X)f(X)\Big) = {}^tf(X)J(X)h$

Il en résulte que $L(h) = \frac{1}{2}(||f(X)||^2 + 2{}^th{}^tJ(X)f(X) + {}^thG(X)h)$

D'après I–4–b), ${}^tJ(X)f(X) = \nabla F(X)$ et on sait que $\frac{1}{2}||f(X)||^2 = F(X)$, donc

$$\boxed{\begin{aligned} L(h) &= F(X) + {}^th{}^tJ(X)f(X) + \frac{1}{2}{}^thG(X)h \\ &= F(X) + {}^th\nabla F(X) + \frac{1}{2}{}^thG(X)h \qquad \text{d'après I–4–a)} \end{aligned}}$$

2–a)

La matrice P est symétrique réelle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, elle est donc diagonalisable en base orthonormée.

2–b)

Il existe donc une matrice orthogonale Q appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale D appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telles que $P = QDQ^{-1} = QD{}^tQ$ (puisque Q est orthogonale).

${}^thPh = {}^thQD{}^tQh = {}^t({}^tQh)D{}^tQh$.

Posons $Y = {}^tQh$; Y appartient à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. On peut écrire $Y = (y_1, \dots, y_p)$ en identifiant, comme le dit l'énoncé, les éléments de $\mathbb{R}^p$, les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et les matrices lignes de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

L'égalité précedente devient ${}^thPh = {}^tYDY = \sum_{k=1}^{p} \theta_k y_k^2$.

L'inégalité triangulaire donne $|{}^thPh| \leq \sum_{k=1}^{p} |\theta_k| y_k^2$

Or par hypothèse $\forall k \in [\![1;p]\!]$, $|\theta_k| \leq \theta$. On multiplie ces inégalités par $y_k^2 \geq 0$ et on les ajoute ; il vient $\sum_{k=1}^{p} |\theta_k| y_k^2 \leq \sum_{k=1}^{p} \theta y_k^2 \leq \theta \sum_{k=1}^{p} y_k^2$, soit finalement

$$\boxed{|{}^thPh| \leq \theta ||Y||^2}$$

3–a)

F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^p$, son développement à l'ordre 2 existe et on a $\forall h \in \mathbb{R}^p$,

$F(X+h) = F(X) + \langle \nabla F(X), h \rangle + \frac{1}{2}q_X(h) + ||h||^2\varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et où q_X est la forme quadratique associée à la hessienne de F au point X.

3–b)

$\langle \nabla F(X), h \rangle = {}^th\nabla F(X)$ et $q_X(h) = {}^th\nabla^2 F(X)h$.

D'après I–4–b), $q_X(h) = {}^th\Big(G(X) + \sum_{i=1}^{n} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)h$, donc

$$\begin{aligned} F(X+h) &= F(X) + {}^th\nabla F(X) + \frac{1}{2}{}^th\Big(G(X) + \sum_{i=1}^{n} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)h + ||h||^2\varepsilon(h) \\ &= \underbrace{F(X) + {}^th\nabla F(X) + \frac{1}{2}{}^thG(X)h}_{=L(h)} + \frac{1}{2}{}^th\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)h + ||h||^2\varepsilon(h) \end{aligned}$$

$$F(X+h) = L(h) + \frac{1}{2}{}^th\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)h + ||h||^2\varepsilon(h) \qquad \textbf{(2)}$$

Pour tout indice $i \in [\![1;n]\!]$, la matrice $f_i(X)\nabla^2 f_i(X)$ est symétrique réelle à cause du théorème de Schwarz, donc la matrice $\frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)$ est aussi symétrique réelle.

Posons $P = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{n} f_i(X)\nabla^2 f_i(X)\Big)$; l'égalité **(2)** s'écrit

$$F(X+h) = L(h) + {}^thPh + ||h||^2\varepsilon(h)$$

$$\begin{aligned} \forall h \neq 0, \ \left|\frac{F(X+h) - L(h)}{||h||}\right| &= \left|\frac{{}^thPh + ||h||^2\varepsilon(h)}{||h||}\right| \\ &\leq \frac{1}{||h||}\Big(|{}^thPh| + ||h||^2|\varepsilon(h)|\Big) \\ &\leq \frac{1}{||h||}|{}^thPh| + ||h|||\varepsilon(h)| \\ &\leq \frac{\theta||h||^2}{||h||} + ||h|||\varepsilon(h)| \qquad \text{d'après 2–b)} \\ &\leq \theta||h|| + ||h|||\varepsilon(h)| \end{aligned}$$

$\lim_{h \to 0}(\theta||h|| + ||h|||\varepsilon(h)|) = 0$ donc par encadrement

$$\boxed{\lim_{h \to 0}\left|\frac{F(X+h) - L(h)}{||h||}\right| = 0}$$

4–a)

$\varphi_1(h) = {}^th\nabla F(X) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial F}{\partial x_i}(X)$; donc $\frac{\partial \varphi_1}{\partial h_j}(h) = \frac{\partial F}{\partial x_j}(X)$

$\varphi_2(h) = \sum_{i=1}^{p} g_{i,i}(X)h_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < k \leq p} g_{i,k}(X)h_ih_k$ d'après la formule classique du développement d'une forme quadratique lorsque l'on connaît sa matrice.

Soit $j \in [\![1;p]\!]$; réécrivons la deuxième somme de ce développement en faisant apparaître les termes en h_j

$$\sum_{1\le i<k\le p} g_{i,k}(X)h_ih_k = \sum_{1\le i<j\le p} g_{i,j}(X)h_ih_j + \sum_{1\le j<k\le p} g_{j,k}(X)h_jh_k + \sum_{\substack{1\le i<k\le p\\ i\neq j,k\neq j}} g_{i,k}(X)h_ih_k$$

$$\frac{\partial\varphi_2(h)}{\partial h_j} = 2g_{j,j}(X)h_j + 2\sum_{1\le i<j\le p} g_{i,j}(X)h_i + 2\sum_{1\le j<i\le p} g_{j,i}(X)h_i\ ;$$

la dernière somme vaut $2\displaystyle\sum_{1\le j<i\le p} g_{i,j}(X)h_i$ car G est symétrique, donc

$$\frac{\partial\varphi_2(h)}{\partial h_j} = 2\sum_{i=1}^{p} g_{i,j}(X)h_i$$

4–b)

On a $L(h) = F(X) + \varphi_1(h) + \frac{1}{2}\varphi_2(h)$; par linéarité du gradient, $\nabla L(h) = \nabla\varphi_1(h) + \frac{1}{2}\nabla\varphi_2(h)$.

Or $\nabla\varphi_1(h) = \nabla F(X)$ d'après a).

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla\varphi_2(h) &= \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial h_1}(X),\dots,\frac{\partial\varphi_2}{\partial h_j}(X),\dots,\frac{\partial\varphi_2}{\partial h_p}(X)\right)\\ &= \left(\sum_{i=1}^{p} g_{i,1}(X)h_i,\dots,\sum_{i=1}^{p} g_{i,j}(X)h_i,\dots,\sum_{i=1}^{p} g_{i,p}(X)h_i\right)\\ &= \begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{p} g_{i,1}(X)h_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{p} g_{i,j}(X)h_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{p} g_{i,p}(X)h_i\end{pmatrix}\end{aligned}$$

en identifiant les lignes aux colonnes

$$\frac{1}{2}\nabla\varphi_2(h) = G(X)h$$

$$\boxed{\text{Finalement, } \nabla L(h) = \nabla F(X) + G(X)h}$$

5–a)

La matrice ${}^tJJ$ est une matrice symétrique réelle appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Elle est donc diagonalisable en base orthonormée. Soit λ une valeur propre de ${}^tJJ$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé.

${}^tJJY = \lambda Y \Longrightarrow {}^tY{}^tJJY = \lambda{}^tYY$, ce qui s'exprime aussi ${}^t(JY)JY = \lambda{}^tYY$, ou encore $||JY||^2 = \lambda||Y||^2$

$Y \neq 0 \Longrightarrow ||Y||^2 > 0$, on a alors $\lambda = \dfrac{||JY||^2}{||Y||^2}$, donc $\boxed{\lambda \ge 0}$

5–b)

Il s'agit de montrer que $\operatorname{Ker}{}^tJJ = \{0\} \Longrightarrow \operatorname{Ker} J = \{0\}$.

Montrons d'une manière générale que $\operatorname{Ker}{}^tJJ = \operatorname{Ker} J$

- Soit $Y \in \operatorname{Ker}{}^tJJ$: $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et ${}^tJJY = 0$. Cela implique ${}^tY{}^tJJY = 0$, ou encore $||JY||^2 = 0$. On a $JY = 0$, donc $Y \in \operatorname{Ker} J$.
- Soit $Y \in \operatorname{Ker} J$: $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $JY = 0$. On multiplie par ${}^tJ$ à gauche et on a ${}^tJJY = 0$: $Y \in \operatorname{Ker}{}^tJJ$.

On a bien l'égalité $\operatorname{Ker}{}^tJJ = \operatorname{Ker} J$.

$$\boxed{\text{Donc si } {}^tJJ \text{ est inversible, son noyau est nul, donc celui de } J \text{ aussi et le rang de } J \text{ égal } p}$$

6)

Si $\widehat{h}$ est un point critique de L, alors $\nabla L(\widehat{h}) = 0$.

D'après 4–b), on a alors : $\nabla F(X) + G(X)\widehat{h} = 0$, soit $G(X)\widehat{h} = -\nabla F(X)$; donc ${}^t\widehat{h}G(X)\widehat{h} = -{}^t\widehat{h}\nabla F(X) = -\langle\widehat{h},\nabla F(X)\rangle$.

Ceci s'écrit aussi ${}^t\widehat{h}{}^tJJ\widehat{h} = -\langle\widehat{h},\nabla F(X)\rangle$, et finalement $||J(X)\widehat{h}||^2 = -\langle\widehat{h},\nabla F(X)\rangle$.

$$\boxed{\text{On a immédiatement } \langle\widehat{h},\nabla F(X)\rangle \le 0}$$

7–a)

Si la matrice $G(X)$ est inversible, alors l'équation $G(X)\widehat{h} = -\nabla F(X)$ admet une unique solution : $\widehat{h} = -(G(X))^{-1}\nabla F(X)$. Or d'après 4–b), $\nabla F(X) = {}^tJ(X)f(X)$, donc

$$\boxed{\widehat{h} = -(G(X))^{-1} \times {}^tJ(X)f(X)}$$

7–b)

Montrons que $J(X)\widehat{h} \neq 0$ pour avoir $\langle\widehat{h},\nabla F(X)\rangle < 0$

Si $J(X)\widehat{h} = 0$, alors $\widehat{h} \in \operatorname{Ker} J(X)$. Donc d'après 5–b), $\widehat{h} \in \operatorname{Ker}{}^tJ(X)J(X)$, c'est-à-dire $\widehat{h} \in \operatorname{Ker} G(X)$. Par hypothèse, $G(X)$ est inversible, donc $\operatorname{Ker} G(X) = \{0\}$. On aurait donc $\widehat{h} = 0$.

D'après 4–b), $\nabla L(0) = \nabla F(X) \neq 0$. Cela est contradictoire.

Conclusion : $J(X)\widehat{h} \neq 0$, donc $||J(X)\widehat{h}|| > 0$ et par conséquent $\langle\widehat{h},\nabla F(X) < 0\rangle = -||J(X)\widehat{h}||^2 < 0$ d'après 6).

$$\boxed{\widehat{h} \text{ est une direction de décroissance de } F(X)}$$

Soit Y un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.

${}^tY\nabla^2L(\widehat{h})Y = {}^tYG(X)Y$ (d'après 4–c)), donc ${}^tY\nabla^2L(\widehat{h})Y = ||J(X)Y||^2$ (car $G(X) = {}^tJ(X)J(X)$.

Or $G(X)$ inversible implique $J(X)$ inversible et $J(X)$ inversible et $Y \neq 0$ impliquent $J(X)h \neq 0$

Donc $\forall Y \in \mathbb{R}^p$ $(Y \neq 0) \Longrightarrow ({}^tY\nabla^2L(\widehat{h})Y = ||J(X)Y||^2 > 0)$. C'est une condition suffisante pour que $\widehat{h}$ soit un minimum local d'après le développement limité à l'ordre 2.

Partie III

1)

La matrice ${}^tJJ$ est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, symétrique, donc diagonalisable en base orthonormée. Il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, il existe une matrice $V \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, orthogonale (${}^tV = V^{-1}$) telles que $D = {}^tV{}^tJJV$.

On sait que les valeurs propres de ${}^tJJ$ sont positives ou nulles (d'après II–5–a)). Rangeons ces valeurs propres dans l'ordre décroissant large, notons q la somme des dimensions des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles (il y en a car ${}^tJJ$ est **diagonalisable et non nulle**). Si $q < p$, alors $\dim\operatorname{Ker}{}^tJJ = p - q > 0$ et il y a $p - q$ zéros sur la diagonale de D. Si l'on note $\lambda_1,\dots,\lambda_q,\lambda_{q+1},\dots,\lambda_p$ les termes diagonaux de D, on peut ecrire $D = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_q & & & \\ & & & \lambda_{q+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_p\end{pmatrix}$

avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_q > 0$ et $\lambda_{q+1} = \ldots = \lambda_p = 0$

2–a)

Le rang de la matrice ${}^tJJ$ est égal au rang de D puisque les deux matrices sont semblables.

$$\boxed{\mathrm{rang}({}^tJJ) = q}$$

2–b)

On sait que $\forall i \in [\![1;q]\!], V_i$ est un vecteur propre de ${}^tJJ$ associé à la valeur propre $\lambda_i > 0$: ${}^tJJV_i = \lambda_i V_i$.

Donc $(J^tJ)JV_i = \lambda_i JV_i$.

Si $JV_i = 0$, alors $V_i \in \mathrm{Ker}\, J$, donc $V_i \in \mathrm{Ker}\, {}^tJJ$ d'après II–5–b) ; le vecteur V_i serait un vecteur propre de ${}^tJJ$ associé à la valeur propre 0, **ce qui est faux.**

Donc JV_i est un vecteur propre de J^tJ associé à la valeur propre non nulle λ_i.

Toute valeur propre non nulle de ${}^tJJ$ est une valeur propre non nulle de J^tJ. Par symétrie des rôles joués par J et ${}^tJ$, on en déduit que toute valeur propre non nulle de J^tJ est une valeur propre non nulle de ${}^tJJ$.

$$\boxed{\text{Les matrices } J^tJ \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ et } {}^tJJ \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ ont les mêmes valeurs propres non nulles}}$$

2–c)

Nous supposerons que la famille $((Y_1, \ldots, Y_r)$ est une base orthogonale du sous-espace propre de ${}^tJJ$ associé à une valeur propre $\lambda > 0$, ce qui semble avoir été omis dans l'énoncé.

Soit $(Y_1, \ldots, Y_r)$ une base orthogonale de vecteurs propres du sous-espace propre de ${}^tJJ$ associé à une valeur propre $\lambda > 0$.

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r \ / \ \sum_{k=1}^{r} \alpha_k JY_k = 0$. Prenons le produit scalaire de ces deux membres avec JY_i pour $i \in [\![1;r]\!]$. On obtient, après avoir utilisé la linéarité par rapport à la première variable du produit scalaire,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \langle JY_k, JY_i\rangle = 0 \quad &\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{r} \alpha_k {}^t(JY_k)JY_i = 0 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{r} \alpha_k {}^tY_k {}^tJJY_i = 0 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \lambda {}^tY_k Y_i = 0 \quad \text{puisque } Y_i \text{ est un vecteur propre de } {}^tJJ \text{ associé à } \lambda \\
&\Longleftrightarrow \alpha_i \lambda ||Y_i||^2 = 0
\end{aligned}$$

puisque les vecteurs Y_k sont deux à deux orthogonaux.

$\lambda > 0$ et $||Y_i||^2 > 0$; l'égalité précédente implique $\alpha_i = 0$

$$\boxed{\forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{R}^r \ / \ \sum_{k=1}^{r} \alpha_k JY_k = 0 \Longrightarrow \alpha_k = 0 \text{ pour tout } k \in [\![1;r]\!] \text{ : la famille } (JY_k) \text{ est libre}}$$

2–d)

Soit E_λ le sous-espace propre de ${}^tJJ$ associé à la valeur propre $\lambda > 0$ et notons r sa dimension. Soit $(V_1, \ldots, V_r) \in \Big(\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})\Big)^r$ une base orthogonale de E_λ.

On vient de voir que la famille $(JV_1, \ldots, JV_r) \in \Big(\mathcal{M}_{n;1}(\mathbb{R})\Big)^r$ est une famille libre de E'_λ, sous-espace propre de J^tJ associé à $\lambda > 0$. Si l'on note r' sa dimension, on en déduit $r \leq r'$. Par la symétrie de rôles joués par ${}^tJ$ et J, on en déduit que $r' \leq r$.

Conclusion $r = r'$.

Puisque ${}^tJJ$ est diagonalisable, son image est égale à la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles. De même pour J^tJ. D'après le résultat précédent, et puisque ces deux matrices ont les mêmes valeurs propres non nulles, on conclut

$$\boxed{\text{Les matrices } {}^tJJ \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \text{ et } J^tJ \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ ont le même rang } q}$$

3–a)

$\forall i \in [\![1;q]\!],\ \lambda_i > 0$, donc $U_i = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} JV_i$ existe et appartient à $\mathbb{R}^n$ ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit $(i,j) \in (\ [\![1;q]\!]\ )^2$.

$$\begin{aligned}
\langle U_i, U_j\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} \langle JV_i, JV_j\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} {}^t(JV_i)JV_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} {}^tV_i {}^tJJV_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} {}^tV_i({}^tJJ)V_j \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}} \lambda_j {}^tV_i V_j \quad \text{car } V_j \text{ est un vecteur propre de } {}^tJJ \text{ associé à } \lambda_j
\end{aligned}$$

Les vecteurs V_i et V_j sont des vecteurs colonnes de la matrice V, qui est une matrice orthogonale, donc ces deux vecteurs sont normés et orthogonaux dès que $i \neq j$. D'où le résultat :

$$\boxed{\langle U_i, U_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \dfrac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_j}\sqrt{\lambda_j}} = 1 & \text{si } j = i \end{cases}}$$

La famille $(U_k)\ 1 \leq k \leq q$ est une famille orthonormale de $\mathbb{R}^n$, formée de vecteurs propres de J^tJ car V_k est un vecteur propre de ${}^tJJ$, donc JV_k est un vecteur propre de J^tJ, donc U_k aussi.

3–b)

$(U_1, \ldots, U_q)$ est une famille libre (orthonormale) de q vecteurs propres de J^tJ, associés aux valeurs propres non nulles de J^tJ. Donc $\forall j \in [\![1;q]\!],\ U_j \in \mathrm{Im}(J^tJ)$.

La dimension de cette image est q d'après 2–c), donc $(U_1, \ldots, U_q)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Im}\, J^tJ$; c'est aussi une base orthonormée de la somme des sous-espaces propres associés aux valeurs propres non nulles de J^tJ.

Puisque la matrice J^tJ est diagonalisable (en base orthonormée d'ailleurs) les sous-espaces propres sont supplémentaires. Le sous-espace propre associé à la valeur 0 est $\mathrm{Ker}(J^tJ)$.

$\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(J^tJ) \bigoplus \mathrm{Ker}(J^tJ)$; d'ailleurs ces deux sous-espaces sont orthogonaux. Donc si l'on prend une base orthonormée $(U_{q+1}, \ldots, U_n)$ de $\mathrm{Ker}(J^tJ)$, la famille $(U_1, \ldots, U_q, U_{q+1}, \ldots, U_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

4)

Soit $S' = {}^tUJV$, on remarque que $S' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ car $V \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ J \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ecrivons $s'_{i,j}$ son terme général (on a $1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p$).

$s'_{i,j}$ est le résultat du produit de la i ème ligne de ${}^tU$, qui est ${}^tU_i$, et de la j ème colonne de JV, qui est JV_j. Donc $\boxed{s'_{i,j} = {}^tU_iJV_j = \langle U_i, JV_j\rangle}$

- Pour $1 \leq j \leq q, s'_{i,j} = \langle U_i, \sqrt{\lambda_j}U_j\rangle$ d'après la définition des U_j , donc $s'_{i,j} = \sqrt{\lambda_j}\langle U_i, U_j\rangle$, ce qui donne

$\forall j \in [\![1;q]\!],\ s'_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et $s'_{j,j} = \sqrt{\lambda_j}$ puisque U_j est normé.

- Pour $j \geq q+1$, le vecteur JV_j est nul ; en effet, V_j est un vecteur propre de ${}^tJJ$ associé à la valeur propre 0, donc c'est un vecteur de $\mathrm{Ker}\, {}^tJJ$ d'après la question 1) ; d'après la question II–5–a) on sait que V_j est aussi un vecteur de $\mathrm{Ker}\, J$, donc $JV_j = 0$ et par conséquent $\langle U, JV_j\rangle = 0$