BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteur : H.E.C.

CODE EPREUVE :

280

HEC_M1_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Mercredi 3 Mai 2006, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour tout couple (p,q) d'entiers strictement positifs, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels. Si A est un élément quelconque de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note A^T la transposée de A.

Dans tout le problème, pour n dans $\mathbb{N}^*$, on identifie $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à n lignes et à coefficients réels. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire de deux vecteurs X et Y étant noté $\langle X,Y\rangle$ ou Y^TX.

Pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, sa norme est donnée par $||X|| = \sqrt{X^TX} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x_k^2\right)^{1/2}$.

Le module et le conjugué d'un nombre complexe z sont notés respectivement $|z|$ et $\overline{z}$. On rappelle que $|z|^2 = z\overline{z}$. Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\pi/2$ est noté i.

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la matrice $H_n = (h_{k,j}^{(n)})_{1\leqslant k,j\leqslant n}$ (appelée matrice de Hilbert) de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, de terme générique $h_{k,j}^{(n)} = \dfrac{1}{k+j-1}$, les entiers k et j décrivant $[\![1,n]\!]$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la matrice H_n s'écrit donc :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

Préliminaire

On rappelle que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une fonction réciproque notée arctan. On note $(\arctan)'$ sa dérivée.

1. a) Pour tout réel x, rappeler l'expression de $(\arctan)'(x)$ en fonction de x.

b) Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}^{+*}$, l'égalité : $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

c) Établir, pour tout x de $\mathbb{R}^{+}$, l'encadrement : $0 \leqslant \arctan x \leqslant x$.

2. a) Montrer que la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

b) Soit U une variable aléatoire réelle de densité ψ. On note F sa fonction de répartition. Déterminer la loi de la variable aléatoire $F(U)$.

c) On rappelle que la fonction Pascal `random` rend un nombre aléatoire de l'intervalle $[0, 1]$ suivant une loi uniforme sur cet intervalle. Écrire, dans le langage Pascal, une fonction `Cauchy` simulant la variable aléatoire U.

Partie I. Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de H_n

1. Calculer, pour tout couple (k, j) de $[\![1, n]\!]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{k+j-2}dt$.

En déduire, pour tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$, l'égalité : $X^T H_n X = \displaystyle\int_0^1 (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$.

2. a) Justifier l'existence d'une matrice diagonale D à coefficients diagonaux strictement positifs, et d'une matrice orthogonale P telles que : $H_n = PDP^T$.

b) On désigne par α_n (resp. β_n) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de H_n.
Montrer, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$, l'encadrement suivant :

$$\alpha_n ||X||^2 \leqslant X^T H_n X \leqslant \beta_n ||X||^2$$

3. On note $\mathcal{V}$ le sous-espace propre de H_n associé à la valeur propre β_n.
a) Soit Y un vecteur de $\mathcal{V}$. Montrer que $Y^T H_n Y = \beta_n ||Y||^2$.

b) Réciproquement, soit Y un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $Y^T H_n Y = \beta_n ||Y||^2$. Montrer que Y appartient à $\mathcal{V}$.

4. Soit $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathcal{V}$. On note $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$ le vecteur dont les composantes sont les valeurs absolues des composantes de X_0.

a) Établir l'inégalité : $|X_0|^T H_n |X_0| \geqslant X_0^T H_n X_0$.

b) En déduire que $|X_0|$ est un élément de $\mathcal{V}$.

c) Montrer que les composantes du vecteur $H_n|X_0|$ sont toutes strictement positives. En déduire que le vecteur X_0 n'a aucune composante nulle.

d) En utilisant le fait que $X_0^T H_n X_0 = |X_0|^T H_n |X_0|$, montrer que les composantes de X_0 sont toutes de même signe.

5. a) Montrer qu'il n'existe pas deux vecteurs non nuls de $\mathcal{V}$ orthogonaux.

b) En déduire la dimension du sous-espace propre $\mathcal{V}$.

Partie II. Croissance et convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$

On rappelle que β_n désigne la plus grande valeur propre de la matrice H_n.

1. Soit $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre de H_n associé à β_n. Soit Z le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par $Z = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $Z^T H_{n+1} Z = X'^T H_n X'$. En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

2. Soit φ_1 et φ_2 deux fonctions définies et continues sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On définit le nombre complexe $\displaystyle\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta$ par :

$$\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta = \int_a^b \varphi_1(\theta)d\theta + i\int_a^b \varphi_2(\theta)d\theta$$

et on rappelle que pour tout réel x, on a : $e^{ix} = \cos x + i\sin x$.

a) Calculer, pour tout k de $\mathbb{Z}$, les deux nombres complexes : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}d\theta$ et $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ik\theta}d\theta$.

b) Montrer, pour tout entier p de $\mathbb{N}$, l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^p dx = -i\int_0^{\pi} e^{i(p+1)\theta}d\theta$.

c) En déduire, pour tout polynôme P à coefficients complexes, l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)dx = -i\int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$.

d) Dans le cas où P est un polynôme à coefficients réels, établir l'inégalité suivante :

$$\left|\int_{-1}^{1} P(x)dx\right| \leqslant \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|d\theta$$

Dans les questions 3 et 4, on désigne par $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ *un vecteur quelconque de* $\mathbb{R}^n$.

3. a) Établir l'encadrement : $0 \leqslant X^T H_n X \leqslant \displaystyle\int_{-1}^{1} (x_0 + x_1 t + \cdots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt$.

b) En déduire que l'on a : $0 \leqslant X^T H_n X \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} |x_0 + x_1 e^{i\theta} + \cdots + x_{n-1}e^{i(n-1)\theta}|^2 d\theta$.

4. a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(\theta) = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\theta}\right|^2$.

Montrer que φ est 2π–périodique et paire ; en déduire l'égalité : $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\theta)d\theta$.

b) Établir l'inégalité : $X^T H_n X \leqslant \pi ||X||^2$.

c) En déduire que la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée, puis qu'elle est convergente.

Partie III. Limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$

Dans cette partie, le vecteur W de $\mathbb{R}^n$ est défini par $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{n} \end{pmatrix}$.

1. Montrer les égalités suivantes :

$$W^T H_n W = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{j}(k+j-1)} = \int_0^1 \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}}\right)^2 dt$$

2. En déduire, pour $n \geqslant 2$, l'inégalité suivante :

$$W^T H_n W \geqslant \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{p-k}}$$

(on pourra utiliser le développement du produit de deux polynômes)

Dans les questions suivantes, p est un entier supérieur ou égal à 2.

3. a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0, p[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(p-x)}}$.

b) En déduire, quelle que soit la parité de p, l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} \geqslant \int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$$

4. Justifier la validité du changement de variable $x = \dfrac{p}{1+t^2}$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$, et établir la relation :

$$\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}} = \pi - 4\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$$

5. On pose : $u_p = \dfrac{1}{p-1}\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{p-1}}\right)$. Montrer que la série de terme général u_p est convergente.

6. a) Montrer que $||W||^2$ est équivalent à $\ln n$, lorsque n tend vers $+\infty$.

b) En déduire la limite de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

HEC 2006 VOIE S

CORRIGE

PRELIMINAIRES

1–a)

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

1–b)

Soit $v\ :\ x \longmapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x > 0,\ v'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

L'application v est constante sur $]0,+\infty[$, donc $\forall x > 0,\ v(x) = v(1) = 2\arctan 1 = 2\frac{\pi}{4}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$$

1–c)

Sur $[0,\frac{\pi}{2}[$, la fonction $\tan$ est strictement croissante et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$, donc la fonction $\arctan$ est strictement croissante et prend ses valeurs dans $[0,\frac{\pi}{2}[$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan x \geq 0}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \leq 0$. La fonction $\arctan$ est donc concave ; sa courbe représentative est au dessous de ses tangentes, en particulier au dessous de la tangente au point $(0,0)$.

Cette tangente a pour équation $y = \arctan' 0 \times x$, c'est-à-dire $y = x$; d'où

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \arctan(x) \leq x}$$

2–a)

La fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}$ (inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$) **(1)**

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) \geq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

La fonction ψ est paire, donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx$ converge (ou existe) si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi(x)dx$ converge et, dans ce cas, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 2\int_0^{+\infty}\psi(x)dx$. Or

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\psi(x)dx &= \lim_{B\to+\infty}\int_0^B \frac{dt}{\pi(1+t^2)}\\ &= \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\pi}\Big[\arctan t\Big]_0^B\\ &= \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\pi}(\arctan B-\arctan 0)\\ &= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)dx = 2\times\frac{1}{2}=1 \qquad \mathbf{(3)}$$

$$\boxed{\text{Les propriétés } \mathbf{(1)},\ \mathbf{(2)},\ \mathbf{(3)} \text{ impliquent que } \psi \text{ est une densité de probabilité}}$$

2–b)

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ F(x) &= \int_{-\infty}^x \psi(t)dt\\ &= \lim_{B\to-\infty}\frac{1}{\pi}\big[\arctan t\big]_B^x\\ &= \frac{1}{\pi}(\arctan x-(-\frac{\pi}{2}))\\ &= \boxed{\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Posons $V=F(U)$.

$U(\Omega)=\mathbb{R}$ car il existe une densité de U qui est >0 sur $\mathbb{R}$ (c'est ψ) ; alors $V(\Omega)=]0,1[=F(\mathbb{R})$

La fonction F est continue sur $\mathbb{R}$ puisque c'est la fonction de répartition d'une variable à densité. F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $F'(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}>0$ pour tout réel x, $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$

F est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$; sa fonction réciproque F^{-1} existe et c'est une bijection strictement croissante de $]0,1[$ sur $\mathbb{R}$

$\forall v\in\mathbb{R},\ P(V\le v)=P(F(U)\le v)$

* Si $v\le 0,\ P(V\le v)=0$
* Si $0<v<1,\ P(V\le v)=1$
* Si $v=1,\ P(V\le v)=P(F(U)\le v)=P(U\le F^{-1}(v))$ (puisque F^{-1} est strictement croissante), donc $P(V\le v)=F(F^{-1}(v))=v$

$$\boxed{V \text{ suit la loi uniforme sur }]0,1[\ ;\ V\hookrightarrow\mathcal{U}_{]0,1[}}$$

2–c)

Soit $v\in\,]0,1[$; $F^{-1}(v)=x\Longleftrightarrow v=F(x)\Longleftrightarrow v=\frac{1}{\pi}\arctan x+\frac{1}{2}$,

donc $x=\tan(\pi v-\frac{\pi}{2})=-\dfrac{1}{\tan(\pi v)}$

$$\boxed{\forall v\in\,]0,1[,\ F^{-1}(v)=-\frac{1}{\tan(\pi v)}}$$

<u>Simulation de U</u>

Function Cauchy(x:real) : real ;

var y :real ;

Begin

y := random ;

Cauchy:=-1/tan(pi*y) ;
End ;

PARTIE I

REMARQUE : l'énoncé propose A^T au lieu du ${}^tA$ habituel ; nous emploierons cette nouvelle notation.

1)

$$\int_0^1 t^{k+j-2}dt = \left[\frac{t^{k+j-1}}{k+j-1}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{k+j-1}}$$

La matrice H_n est symétrique réelle : $\forall(k,j) \in \left(\llbracket 1, n\rrbracket\right)^2,\ h_{k,j}^{(n)} = h_{j,k}^{(n)}$, alors

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} X^T H_n X &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{k,j}^{(n)}.x_{k-1}x_{j-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{k+j-1}x_{k-1}x_{j-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \int_0^1 t^{k+j-2}x_{k-1}x_{j-1}dt \end{aligned}$$

Cette double somme, qui donne les valeurs de $X^T H_n X$, est finie, on peut donc utiliser la linéarité de l'intégration et ainsi,

$$\begin{aligned} X^T H_n X &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t^{k+j-2}x_{k-1}x_{j-1}\right)dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t^{k-1}x_{k-1}t^{j-1}x_{j-1}\right)dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}x_{k-1}\underbrace{\sum_{j=1}^{n} t^{j-1}x_{j-1}}_{S}\right)dt \\ &= \int_0^1 \left(S\sum_{k=1}^{n} t^{k-1}x_{k-1}\right)dt \\ &= \int_0^1 S^2 dt \end{aligned}$$

Posons $\ell = k-1$, alors $S = \sum_{k=1}^{n} t^{k-1}x_{k-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_\ell t^\ell$ et finalement

$$\boxed{X^T H_n X = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \ldots + x_{n-1}t^{n-1})^2 dt}$$

2–a)

La matrice H_n est symétrique réelle, donc **diagonalisable** . Si H_n est associée à un endomorphisme h_n de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans la base canonique orthonormée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors il existe une base orthonormale B' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de h_n dans laquelle la matrice de h_n est une matrice diagonale D, dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de h_n (distinctes ou non).

La matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à la base B' est une **matrice orthogonale** ($P^T = P^{-1}$) et d'après la formule de changement de base pour les endomorphismes,

$$\boxed{H_n = PDP^T}$$

Montrons que les valeurs propres de H_n, c'est-à-dire les termes diagonaux de D, sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de H_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

$X^T H_n X = X^T(\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda ||X||^2$ où $||X|| \neq 0$ puisque $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

D'autre part, on a vu au **1)** que $X^T H_n X = \displaystyle\int_0^1 Q(t)^2 dt$ avec $Q(t) = x_0 + x_1 t + \ldots + x_{n-1}t^{n-1}$.

L'application $t \longmapsto Q(t)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant, donc $\displaystyle\int_0^1 Q(t)^2 dt \geq 0$, ce qui donne $X^T H_n X \geq 0$. Par suite $\lambda ||X||^2 \geq 0$ et puisque $||X||^2 > 0$, il vient $\underline{\lambda \geq 0}$

- Si $\lambda = 0$, c'est que $\displaystyle\int_0^1 Q(t)^2 dt = 0$, donc que $\forall t \in [0,1],\ Q(t)^2 = 0$ (en effet $Q(t)^2 \geq 0$ sur $[0,1]$ et continue), puis $\forall t \in [0,1],\ Q(t) = 0$. Le polynôme Q admet une infinité de racines, il s'ensuit que Q est le polynôme nul et par conséquent $x_0 = \ldots = x_{n-1} = 0$, ce qui implique $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Ceci n'est pas possible car X est un vecteur propre.

Conclusion : $\lambda \neq 0$.

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathrm{spect}(H_n),\ \ \lambda \in \mathbb{R}_+^*}$$

2–b)

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; la matrice colonne des coordonnées de X dans la base B' introduite au **2–a)** est $X' = P^{-1}X = P^T X$ d'après le cours, notée $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X^T H_n X &= X^T PDP^T X = (P^T X)^T D (P^T X) \\ &= X'^T D X' \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x'^2_k \quad \text{car } D \text{ est diagonale} \end{aligned}$$

$\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ sont les valeurs propres (pas forcément distinctes) de H_n, donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\alpha_n \leq \lambda_k \leq \beta_n$.

Il s'ensuit que $\alpha_n x'^2_k \leq \lambda_k x'^2_k \leq \beta_n x'^2_k$ (car $x'^2_k \geq 0$) puis, en sommant ces encadrements, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n x'^2_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x'^2_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \beta_n x'^2_k$, c'est-à-dire $\alpha_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x'^2_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x'^2_k \leq \beta_n \sum_{k=0}^{n-1} x'^2_k$; or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x'^2_k = ||X||^2$ puisque la base B' est orthonormale , donc

$$\boxed{\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \ \alpha_n ||X||^2 \leq X^T H_n X \leq \beta_n ||X||^2}$$