



# BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : H.E.C.

CODE ÉPREUVE :

280

HEC\_M1\_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

## MATHÉMATIQUES I

Mercredi 3 Mai 2006, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Pour tout couple  $(p, q)$  d'entiers strictement positifs, on note  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices à  $p$  lignes et  $q$  colonnes à coefficients réels. Si  $A$  est un élément quelconque de  $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ , on note  $A^T$  la transposée de  $A$ .

Dans tout le problème, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on identifie  $\mathbb{R}^n$  et l'ensemble  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  des matrices colonnes à  $n$  lignes et à coefficients réels. L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne canonique, le produit scalaire de deux vecteurs  $X$  et  $Y$  étant noté  $\langle X, Y \rangle$  ou  $Y^T X$ .

Pour tout vecteur  $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^n$ , sa norme est donnée par  $\|X\| = \sqrt{X^T X} = \left( \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 \right)^{1/2}$ .

Le module et le conjugué d'un nombre complexe  $z$  sont notés respectivement  $|z|$  et  $\bar{z}$ . On rappelle que  $|z|^2 = z\bar{z}$ . Le nombre complexe de module 1 et d'argument  $\pi/2$  est noté  $i$ .

L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la matrice  $H_n = (h_{k,j}^{(n)})_{1 \leq k,j \leq n}$  (appelée matrice de Hilbert) de  $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ , de terme générique  $h_{k,j}^{(n)} = \frac{1}{k+j-1}$ , les entiers  $k$  et  $j$  décrivant  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, la matrice  $H_n$  s'écrit donc :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

### Préliminaire

On rappelle que la restriction de la fonction tangente à l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  admet une fonction réciproque notée  $\arctan$ . On note  $(\arctan)'$  sa dérivée.

1. a) Pour tout réel  $x$ , rappeler l'expression de  $(\arctan)'(x)$  en fonction de  $x$ .

b) Montrer, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ , l'égalité :  $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ .

c) Établir, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^+$ , l'encadrement :  $0 \leq \arctan x \leq x$ .

2. a) Montrer que la fonction  $\psi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\psi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$ .

b) Soit  $U$  une variable aléatoire réelle de densité  $\psi$ . On note  $F$  sa fonction de répartition. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $F(U)$ .

c) On rappelle que la fonction Pascal `random` rend un nombre aléatoire de l'intervalle  $[0, 1]$  suivant une loi uniforme sur cet intervalle. Écrire, dans le langage Pascal, une fonction Cauchy simulant la variable aléatoire  $U$ .

### Partie I. Dimension du sous-espace propre associé à la plus grande valeur propre de $H_n$

1. Calculer, pour tout couple  $(k, j)$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ , l'intégrale  $\int_0^1 t^{k+j-2} dt$ .

En déduire, pour tout vecteur  $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'égalité :  $X^T H_n X = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1})^2 dt$ .

2. a) Justifier l'existence d'une matrice diagonale  $D$  à coefficients diagonaux strictement positifs, et d'une matrice orthogonale  $P$  telles que :  $H_n = PDP^T$ .

b) On désigne par  $\alpha_n$  (resp.  $\beta_n$ ) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de  $H_n$ .

Montrer, pour tout vecteur  $X$  de  $\mathbb{R}^n$ , l'encadrement suivant :

$$\alpha_n \|X\|^2 \leq X^T H_n X \leq \beta_n \|X\|^2$$

3. On note  $\mathcal{V}$  le sous-espace propre de  $H_n$  associé à la valeur propre  $\beta_n$ .

a) Soit  $Y$  un vecteur de  $\mathcal{V}$ . Montrer que  $Y^T H_n Y = \beta_n \|Y\|^2$ .

b) Réciproquement, soit  $Y$  un vecteur non nul de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant  $Y^T H_n Y = \beta_n \|Y\|^2$ . Montrer que  $Y$  appartient à  $\mathcal{V}$ .

4. Soit  $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$  un vecteur non nul de  $\mathcal{V}$ . On note  $|X_0| = \begin{pmatrix} |x_0| \\ |x_1| \\ \vdots \\ |x_{n-1}| \end{pmatrix}$  le vecteur dont les composantes

sont les valeurs absolues des composantes de  $X_0$ .

a) Établir l'inégalité :  $|X_0|^T H_n |X_0| \geq X_0^T H_n X_0$ .

b) En déduire que  $|X_0|$  est un élément de  $\mathcal{V}$ .

c) Montrer que les composantes du vecteur  $H_n |X_0|$  sont toutes strictement positives. En déduire que le vecteur  $X_0$  n'a aucune composante nulle.

d) En utilisant le fait que  $X_0^T H_n X_0 = |X_0|^T H_n |X_0|$ , montrer que les composantes de  $X_0$  sont toutes de même signe.

5. a) Montrer qu'il n'existe pas deux vecteurs non nuls de  $\mathcal{V}$  orthogonaux.

b) En déduire la dimension du sous-espace propre  $\mathcal{V}$ .

**Partie II. Croissance et convergence de la suite  $(\beta_n)_{n \geq 1}$**

On rappelle que  $\beta_n$  désigne la plus grande valeur propre de la matrice  $H_n$ .

1. Soit  $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  un vecteur propre de  $H_n$  associé à  $\beta_n$ . Soit  $Z$  le vecteur de  $\mathbb{R}^{n+1}$  défini par
- $$Z = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- Montrer que  $Z^T H_{n+1} Z = X'^T H_n X'$ . En déduire que la suite  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  est croissante.

2. Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux fonctions définies et continues sur le segment  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ . On définit le nombre complexe  $\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta$  par :

$$\int_a^b (\varphi_1(\theta) + i\varphi_2(\theta))d\theta = \int_a^b \varphi_1(\theta)d\theta + i \int_a^b \varphi_2(\theta)d\theta$$

et on rappelle que pour tout réel  $x$ , on a :  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ .

- a) Calculer, pour tout  $k$  de  $\mathbb{Z}$ , les deux nombres complexes :  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} d\theta$  et  $\int_0^{\pi} e^{ik\theta} d\theta$ .
- b) Montrer, pour tout entier  $p$  de  $\mathbb{N}$ , l'égalité :  $\int_{-1}^1 x^p dx = -i \int_0^{\pi} e^{i(p+1)\theta} d\theta$ .
- c) En déduire, pour tout polynôme  $P$  à coefficients complexes, l'égalité :  $\int_{-1}^1 P(x)dx = -i \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta$ .
- d) Dans le cas où  $P$  est un polynôme à coefficients réels, établir l'inégalité suivante :

$$\left| \int_{-1}^1 P(x)dx \right| \leq \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|d\theta$$

Dans les questions 3 et 4, on désigne par  $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$  un vecteur quelconque de  $\mathbb{R}^n$ .

3. a) Établir l'encadrement :  $0 \leq X^T H_n X \leq \int_{-1}^1 (x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1})^2 dt$ .

- b) En déduire que l'on a :  $0 \leq X^T H_n X \leq \int_0^{\pi} |x_0 + x_1 e^{i\theta} + \dots + x_{n-1} e^{i(n-1)\theta}|^2 d\theta$ .

4. a) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $\varphi(\theta) = \left| \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\theta} \right|^2$ .

Montrer que  $\varphi$  est  $2\pi$ -périodique et paire ; en déduire l'égalité :  $\int_0^{\pi} \varphi(\theta)d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\theta)d\theta$ .

- b) Établir l'inégalité :  $X^T H_n X \leq \pi \|X\|^2$ .

- c) En déduire que la suite  $(\beta_n)_{n \geq 1}$  est majorée, puis qu'elle est convergente.

**Partie III. Limite de la suite  $(\beta_n)_{n \geq 1}$**

Dans cette partie, le vecteur  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  est défini par  $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{2} \\ \vdots \\ 1/\sqrt{n} \end{pmatrix}$ .

1. Montrer les égalités suivantes :

$$W^T H_n W = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{j}(k+j-1)} = \int_0^1 \left( \sum_{\ell=1}^n \frac{t^{\ell-1}}{\sqrt{\ell}} \right)^2 dt$$

2. En déduire, pour  $n \geq 2$ , l'inégalité suivante :

$$W^T H_n W \geq \sum_{p=2}^n \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{p-k}}$$

(on pourra utiliser le développement du produit de deux polynômes)

Dans les questions suivantes,  $p$  est un entier supérieur ou égal à 2.

3. a) Étudier les variations de la fonction  $g$  définie sur  $]0, p[$  par :  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x(p-x)}}$ .

b) En déduire, quelle que soit la parité de  $p$ , l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\sqrt{k(p-k)}} \geq \int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$$

4. Justifier la validité du changement de variable  $x = \frac{p}{1+t^2}$  dans l'intégrale  $\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$ , et établir la relation :

$$\int_1^{p-1} \frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}} = \pi - 4 \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{p-1}} \right)$$

5. On pose :  $u_p = \frac{1}{p-1} \arctan \left( \frac{1}{\sqrt{p-1}} \right)$ . Montrer que la série de terme général  $u_p$  est convergente.

6. a) Montrer que  $\|W\|^2$  est équivalent à  $\ln n$ , lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

b) En déduire la limite de la suite  $(\beta_n)_{n \geq 1}$ .



## ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

HEC 2006 VOIE S

CORRIGE

## PRELIMINAIRES

1-a)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

1-b)

Soit  $v : x \mapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$  pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

$$\forall x > 0, v'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

L'application  $v$  est constante sur  $]0, +\infty[$ , donc  $\forall x > 0, v(x) = v(1) = 2 \arctan 1 = 2 \frac{\pi}{4}$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

1-c)

Sur  $[0, \frac{\pi}{2}[$ , la fonction  $\tan$  est strictement croissante et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , donc la fonction  $\arctan$  est strictement croissante et prend ses valeurs dans  $[0, \frac{\pi}{2}[$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan x \geq 0$$

- $\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \leq 0$ . La fonction  $\arctan$  est donc concave ; sa courbe représentative est au dessous de ses tangentes, en particulier au dessous de la tangente au point  $(0, 0)$ .

Cette tangente a pour équation  $y = \arctan' 0 \times x$ , c'est-à-dire  $y = x$  ; d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \arctan(x) \leq x$$

2-a)

La fonction  $\psi$  est continue sur  $\mathbb{R}$  (inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ ) (1)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \psi(x) \geq 0 \quad (2)$$

La fonction  $\psi$  est paire, donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx$  converge (ou existe) si et seulement si  $\int_0^{+\infty} \psi(x) dx$  converge et, dans ce cas,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} \psi(x) dx$ . Or

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \psi(x) dx &= \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \frac{dt}{\pi(1+t^2)} \\
&= \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} [\arctan t]_0^B \\
&= \lim_{B \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} (\arctan B - \arctan 0) \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad (3)$$

Les propriétés (1), (2), (3) impliquent que  $\psi$  est une densité de probabilité

2-b) \_\_\_\_\_

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, F(x) &= \int_{-\infty}^x \psi(t) dt \\
&= \lim_{B \rightarrow -\infty} \frac{1}{\pi} [\arctan t]_B^x \\
&= \frac{1}{\pi} (\arctan x - (-\frac{\pi}{2})) \\
&= \boxed{\frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Posons  $V = F(U)$ .

$U(\Omega) = \mathbb{R}$  car il existe une densité de  $U$  qui est  $> 0$  sur  $\mathbb{R}$  (c'est  $\psi$ ) ; alors  $V(\Omega) = ]0, 1[ = F(\mathbb{R})$

La fonction  $F$  est continue sur  $\mathbb{R}$  puisque c'est la fonction de répartition d'une variable à densité.  $F$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  car  $F'(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} > 0$  pour tout réel  $x$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

$F$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, 1[$  ; sa fonction réciproque  $F^{-1}$  existe et c'est une bijection strictement croissante de  $]0, 1[$  sur  $\mathbb{R}$

$\forall v \in \mathbb{R}, P(V \leq v) = P(F(U) \leq v)$

\* Si  $v \leq 0, P(V \leq v) = 0$

\* Si  $0 < v < 1, P(V \leq v) = 1$

\* Si  $v = 1, P(V \leq v) = P(F(U) \leq v) = P(U \leq F^{-1}(v))$  (puisque  $F^{-1}$  est strictement croissante), donc  $P(V \leq v) = F(F^{-1}(v)) = v$

$V$  suit la loi uniforme sur  $]0, 1[$  ;  $V \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$

2-c) \_\_\_\_\_

Soit  $v \in ]0, 1[$  ;  $F^{-1}(v) = x \iff v = F(x) \iff v = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}$ ,

donc  $x = \tan(\pi v - \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan(\pi v)}$

$$\forall v \in ]0, 1[, F^{-1}(v) = -\frac{1}{\tan(\pi v)}$$

### Simulation de $U$

Function Cauchy(x:real) : real ;

var y :real ;

Begin

y := random ;

Cauchy:  $= -1/\tan(\pi \cdot y)$  ;

End ;

PARTIE I

**REMARQUE** : l'énoncé propose  $A^T$  au lieu du  ${}^tA$  habituel ; nous emploierons cette nouvelle notation.

1) \_\_\_\_\_

$$\int_0^1 t^{k+j-2} dt = \left[ \frac{t^{k+j-1}}{k+j-1} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{k+j-1}}$$

La matrice  $H_n$  est symétrique réelle :  $\forall (k, j) \in ([1, n])^2$ ,  $h_{k,j}^{(n)} = h_{j,k}^{(n)}$ , alors

$$\forall X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

$$\begin{aligned} X^T H_n X &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n h_{k,j}^{(n)} \cdot x_{k-1} x_{j-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{k+j-1} x_{k-1} x_{j-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^1 t^{k+j-2} x_{k-1} x_{j-1} dt \end{aligned}$$

Cette double somme, qui donne les valeurs de  $X^T H_n X$ , est finie, on peut donc utiliser la linéarité de l'intégration et ainsi,

$$\begin{aligned} X^T H_n X &= \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n t^{k+j-2} x_{k-1} x_{j-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n t^{k-1} x_{k-1} t^{j-1} x_{j-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{k=1}^n t^{k-1} x_{k-1} \underbrace{\sum_{j=1}^n t^{j-1} x_{j-1}}_S \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( S \sum_{k=1}^n t^{k-1} x_{k-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 S^2 dt \end{aligned}$$

Posons  $\ell = k - 1$ , alors  $S = \sum_{k=1}^n t^{k-1} x_{k-1} = \sum_{\ell=0}^{n-1} x_{\ell} t^{\ell}$  et finalement

$$\boxed{X^T H_n X = \int_0^1 (x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1})^2 dt}$$

2-a) \_\_\_\_\_

La matrice  $H_n$  est symétrique réelle, donc **diagonalisable**. Si  $H_n$  est associée à un endomorphisme  $h_n$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  dans la base canonique orthonormée de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , alors il existe une base orthonormale  $B'$  de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , formée de vecteurs propres de  $h_n$  dans laquelle la matrice de  $h_n$  est une matrice diagonale  $D$ , dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de  $h_n$  (distinctes ou non).

La matrice de passage de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  à la base  $B'$  est une **matrice orthogonale** ( $P^T = P^{-1}$ ) et d'après la formule de changement de base pour les endomorphismes,

$$H_n = PDP^T$$

Montrons que les valeurs propres de  $H_n$ , c'est-à-dire les termes diagonaux de  $D$ , sont strictement positives.

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $H_n$  et  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$  un vecteur propre associé.

$$X^T H_n X = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2 \text{ où } \|X\| \neq 0 \text{ puisque } X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part, on a vu au **1**) que  $X^T H_n X = \int_0^1 Q(t)^2 dt$  avec  $Q(t) = x_0 + x_1 t + \dots + x_{n-1} t^{n-1}$ .

L'application  $t \mapsto Q(t)^2$  est continue et positive sur  $[0, 1]$ , les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant, donc  $\int_0^1 Q(t)^2 dt \geq 0$ , ce qui donne  $X^T H_n X \geq 0$ . Par suite  $\lambda \|X\|^2 \geq 0$  et puisque  $\|X\|^2 > 0$ , il vient  $\lambda \geq 0$

• Si  $\lambda = 0$ , c'est que  $\int_0^1 Q(t)^2 dt = 0$ , donc que  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $Q(t)^2 = 0$  (en effet  $Q(t)^2 \geq 0$  sur  $[0, 1]$  et continue), puis  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $Q(t) = 0$ . Le polynôme  $Q$  admet une infinité de racines, il s'ensuit que  $Q$  est le polynôme nul et par conséquent  $x_0 = \dots = x_{n-1} = 0$ , ce qui implique  $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ . Ceci n'est pas possible car  $X$  est un vecteur propre.

**Conclusion :**  $\lambda \neq 0$ .

$$\forall \lambda \in \text{spect}(H_n), \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

## 2-b)

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ; la matrice colonne des coordonnées de  $X$  dans la base  $B'$  introduite

au **2-a**) est  $X' = P^{-1}X = P^T X$  d'après le cours, notée  $X' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ \vdots \\ x'_{n-1} \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} X^T H_n X &= X^T P D P^T X = (P^T X)^T D (P^T X) \\ &= X'^T D X' \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x_k'^2 \text{ car } D \text{ est diagonale} \end{aligned}$$

$\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$  sont les valeurs propres (pas forcément distinctes) de  $H_n$ , donc  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $\alpha_n \leq \lambda_k \leq \beta_n$ .

Il s'ensuit que  $\alpha_n x_k'^2 \leq \lambda_k x_k'^2 \leq \beta_n x_k'^2$  (car  $x_k'^2 \geq 0$ ) puis, en sommant ces encadrements,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_n x_k'^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x_k'^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \beta_n x_k'^2, \text{ c'est-à-dire } \alpha_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k'^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x_k'^2 \leq \beta_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k'^2; \text{ or } \sum_{k=0}^{n-1} x_k'^2 = \|X\|^2 \text{ puisque la base } B' \text{ est orthonormale, donc}$$

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \alpha_n \|X\|^2 \leq X^T H_n X \leq \beta_n \|X\|^2$$