BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

<u>CODE EPREUVE</u> :

295
EML_MATS

Concepteur : EM LYON

1ère épreuve (option scientifique)

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLÈME I

Préliminaires

1.a. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $t^n \, \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ est convergente.

2. En déduire que, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \, \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$ converge.

On admet dans tout le problème : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

On note, dans tout le problème, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n \, \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$.

3.a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{2} I_n$.

b. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p+1} = 0$.

c. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$.

I Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 \,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $F(x,y) = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$.

2. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$, et en déduire les trois points critiques de F.

3. Déterminer les extrémums locaux de F. En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de F en chacun de ces points.

II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ convergent.

On note $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t\cos(xt)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. Établir, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$: $\left|\sin(a+\lambda) - \sin a - \lambda\cos a\right| \leqslant \dfrac{\lambda^2}{2}$.

On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.

3.a. Démontrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \underset{h \longrightarrow 0}{\longrightarrow} 0$.

b. En déduire que S est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S'(x) = C(x)$.

4.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{2} S(x)$.

b. Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $2\,\mathrm{e}^{\frac{x^2}{4}}\,S(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

c. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $S(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$ et $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{4}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}} \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{\frac{t^2}{4}}\,\mathrm{d}t$.

III Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $g(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

2.a. Montrer, pour tout $u \in [0\,;+\infty[$: $0 \leqslant (1 - u + u^2) - \dfrac{1}{1+u} \leqslant u^3$.

b. En déduire, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $0 \leqslant \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (1 - x^2t^2 + x^4t^4)\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t - g(x) \leqslant \frac{15\sqrt{\pi}}{8}x^6$.

3. Montrer que g admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

IV Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

On note, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\displaystyle u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2+(2p)!}\,\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$

2. Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$: $\quad 0 \leqslant u_p \leqslant \dfrac{I_{2p}}{(2p)!}$.

En déduire que la série de terme général u_p est convergente.

Problème II

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par I_n la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère un n-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ et le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$.

On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

On dit que C est la matrice compagnon du polynôme P.

On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On note id l'application identité de $\mathbb{C}^n$ et on appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que C soit la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}_0$.

On note $f^0 = \mathrm{id}$ et, pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

1.a. Exprimer, pour tout $i \in [\![1; n-1]\!]$, $f(e_i)$ en fonction de e_{i+1}.

b. En déduire : $\quad \forall j \in [\![1; n-1]\!],\ \ f^j(e_1) = e_{j+1}$ et $f^n(e_1) = -(a_0 e_1 + a_1 e_2 + \cdots + a_{n-1} e_n)$.

2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $g = f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \cdots + a_1 f + a_0 \mathrm{id}$.

a. Vérifier : $\quad g(e_1) = 0$.

b. Montrer : $\quad \forall i \in \mathbb{N},\ \ g \circ f^i = f^i \circ g$.

c. En déduire : $\quad \forall i \in [\![1; n]\!],\ \ g(e_i) = 0$.

d. Montrer que le polynôme P est annulateur de l'endomorphisme f.

Application 1 : Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$ telle que $A^5 = A^3 + 2A^2 + \mathrm{I}_5$.

e. Établir que toutes les valeurs propres de C sont des racines du polynôme P.

3.a. Soit $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$ un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à $n-1$.
On note $Q(f)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ défini par $Q(f) = \alpha_0\,\mathrm{id} + \alpha_1 f + \cdots + \alpha_{n-1}f^{n-1}$.
Calculer $Q(f)(e_1)$.

b. En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à $n-1$ et annulateur de f.

c. Soit λ une racine du polynôme P.
Il existe donc un unique polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-\lambda)R$.
Vérifier que $(f - \lambda\,\mathrm{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$, où $\tilde{0}$ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{C}^n$.

d. Conclure que toutes les racines du polynôme P sont des valeurs propres de C.

4.a. Montrer que, pour tout nombre complexe x, la matrice $(C - x\mathrm{I}_n)$ est de rang supérieur ou égal à $n-1$. En déduire que chaque sous-espace propre de C est de dimension 1.

b. En déduire que C est diagonalisable si et seulement si P admet n racines deux à deux distinctes.

5.a. *Application* 2 : Montrer que la matrice $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

b. *Application* 3 : Montrer que la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ n'est pas diagonalisable.

6. On note $B = {}^{t}C$ la matrice transposée de C.

a. Montrer que, pour tout nombre complexe t, la matrice $(B - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible si et seulement si la matrice $(C - t\,\mathrm{I}_n)$ est inversible.

b. En déduire que les matrices B et C ont les mêmes valeurs propres.

c. Soit λ une valeur propre de B. Déterminer une base du sous-espace propre de B associé à λ.

d. On suppose que le polynôme P admet n racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes. Montrer que B est diagonalisable et en déduire que la matrice $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

7. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E admettant n valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_n$ deux à deux distinctes.
L'endomorphisme u est donc diagonalisable et on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u respectivement associés à $\mu_1, \ldots, \mu_n$.

a. Soit $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n$. Montrer que la famille $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ est une base de E.

b. Montrer qu'il existe un polynôme $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1 X + b_0$ tel que la matrice associée à u relativement à la base $\mathcal{B}_a = \big(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a)\big)$ soit la matrice compagnon du polynôme P_1.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

EM LYON 2006 VOIE S

CORRIGE

PROBLEME I

PRELIMINAIRES

1–a)

Par croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} t^{n+2}\exp(-t^2) = \lim_{t\to+\infty} (t^2)^{\frac{n+2}{2}}\exp(-t^2) = 0$. Ce qui se traduit par :

$$\boxed{t^n\exp(-t^2) \underset{(+\infty)}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)}$$

1–b)

Posons $f_n(t) = t^n\exp(-t^2)$. On constate facilement que f_n a la même parité que n : **l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge.**

Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge, on en déduit par négligeabilité que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ converge, donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ converge (la fonction f_n étant continue sur $\mathbb{R}^+$, l'intégrale $\int_0^1 f_n(t)dt$ existe)

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \text{l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} t^n\exp(-t^2)dt \text{ est convergente}}$$

2)

Si $P(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ avec $a_n \neq 0$, on a $P(t) \underset{(+\infty)}{\sim} a_n t^n$, donc $|P(t)| \underset{(\pm\infty)}{\sim} |a_n t^n|$ et puisque $\exp(-t^2) > 0$, on a également $|P(t)\exp(-t^2)| \underset{(\pm\infty)}{\sim} |a_n t^n|\exp(-t^2)$. La fonction $t \longmapsto |a_n t^n|\exp(-t^2)$ est une fonction paire, donc la convergence de $\int_0^{+\infty}|a_n t^n|\exp(-t^2)dt = \int_0^{+\infty}|a_n|t^n\exp(-t^2)dt$ implique celle de $\int_{-\infty}^{+\infty}|a_n t^n|\exp(-t^2)dt$

En changeant a_n en $|a_n|$, on vient de voir, l'intégrale $\int_0^{+\infty}|a_n|t^n\exp(-t^2)dt$ converge, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}|a_n t^n|\exp(-t^2)dt$ est convergente.

Par la règle d'équivalence des fonctions continues positives, on conclut que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |P(t)| \exp(-t^2)dt$ est convergente.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)\exp(-t^2)dt \text{ est absolument convergente, donc convergente}}$$

3–a)

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; posons $I_{n+2}(a,b) = \int_a^b t^{n+2}\exp(-t^2)dt$ et intégrons par parties.

$u(t) = t^{n+1} \Longrightarrow u'(t) = (n+1)t^n$; $v'(t) = t\exp(-t^2) \Longleftarrow v(t) = -\frac{1}{2}\exp(-t^2)$. les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, ce qui légitime l'intégration par parties.

$$\begin{aligned} I_{n+2}(a,b) &= \Big[-\frac{t^{n+1}\exp(-t^2)}{2}\Big]_a^b + \frac{n+1}{2}\int_a^b t^n \exp(-t^2)dt \\ &= -\frac{b^{n+1}\exp(-b^2)}{2} + \frac{a^{n+1}\exp(-a^2)}{2} + \frac{n+1}{2}\int_a^b t^n\exp(-t^2)dt \end{aligned}$$

Par croissances comparées, $\lim_{a\to-\infty} a^{n+1}\exp(-a^2) = 0$ et $\lim_{b\to+\infty} b^{n+1}\exp(-b^2) = 0$;

de plus $\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b t^n\exp(-t^2)dt = I_n$ qui existe : on peut donc passer à la limite dans l'égalité précédente en faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$. On obtient le relation

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n}$$

3–b)

On sait (c'est un résultat du cours) que lorsqu'une fonction f est impaire et que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge, cette intégrale vaut 0

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p+1} = 0}$$

3–c)

Montrons l'égalité par récurrence:

Initialisation : pour $p = 0$, on nous donne $I_0 = \sqrt{\pi}$; $\dfrac{(2\times 0)!}{2^0.0!}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$: l'égalité est satisfaite.

Hérédité : supposons que, pour un entier p donné on ait : $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}.p!}\sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2} I_{2p} \\ &= \frac{2p+1}{2}\frac{(2p)!}{2^{2p}.p!}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}p!}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+1}p!2(p+1)}\sqrt{\pi} \\ &= \frac{2(p+1)!}{2^{2(p+1)}(p+1)!}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire :

$$\boxed{\text{par principe du raisonnement par récurrence : } \forall p \in \mathbb{N},\ I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}.p!}\sqrt{\pi}}$$