



BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EM LYON

CODE ÉPREUVE :

295  
EML\_MATS

1<sup>ère</sup> épreuve (option scientifique)

## MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2006 de 8 heures à 12 heures

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

### PROBLÈME I

#### Préliminaires

- 1.a. Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $t^n e^{-t^2} = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right)$ .
- b. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$  est convergente.
2. En déduire que, pour tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) e^{-t^2} dt$  converge.

On admet dans tout le problème :  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$ .

On note, dans tout le problème, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2} dt$ .

- 3.a. Établir, à l'aide d'une intégration par parties, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$ .
- b. Montrer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $I_{2p+1} = 0$ .
- c. Montrer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}$ .

## I Recherche d'extrémums locaux pour une fonction de deux variables réelles

On note  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , par :

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :  $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2 + 4xy + y^2) + x^2y^2$ .
2. Calculer les dérivées partielles premières de  $F$  en tout point  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$ , et en déduire les trois points critiques de  $F$ .
3. Déterminer les extrémums locaux de  $F$ . En chacun de ceux-ci, préciser s'il s'agit d'un minimum local ou d'un maximum local, et préciser la valeur de  $F$  en chacun de ces points.

## II Calcul d'intégrales dépendant d'un paramètre

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les intégrales  $\int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt$  et  $\int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt$  convergent.

On note  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  les applications définies, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \sin(xt) e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad C(x) = \int_0^{+\infty} t \cos(xt) e^{-t^2} dt.$$

2. Établir, pour tout  $a \in \mathbb{R}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $|\sin(a + \lambda) - \sin a - \lambda \cos a| \leq \frac{\lambda^2}{2}$ .

*On pourra utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange.*

- 3.a. Démontrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $\frac{S(x+h) - S(x)}{h} - C(x) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

b. En déduire que  $S$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $S'(x) = C(x)$ .

- 4.a. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}S(x)$ .

b. Montrer, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $2e^{\frac{x^2}{4}} S(x) = \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ .

- c. En déduire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $S(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$  et  $C(x) = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_0^x e^{\frac{t^2}{4}} dt$ .

## III Obtention d'un développement limité

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$  converge.

On note  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , par :  $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} e^{-t^2} dt$ .

- 2.a. Montrer, pour tout  $u \in [0; +\infty[$  :  $0 \leq (1-u+u^2) - \frac{1}{1+u} \leq u^3$ .

b. En déduire, pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2t^2+x^4t^4) e^{-t^2} dt - g(x) \leq \frac{15\sqrt{\pi}}{8} x^6$ .

3. Montrer que  $g$  admet un développement limité à l'ordre 5 en 0, et former ce développement limité.

#### IV Nature d'une série

1. Montrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$  converge.

On note, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $u_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{t^2 + (2p)!} e^{-t^2} dt$ .

2. Montrer, pour tout  $p \in \mathbb{N}$  :  $0 \leq u_p \leq \frac{I_{2p}}{(2p)!}$ .

En déduire que la série de terme général  $u_p$  est convergente.

### PROBLÈME II

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par  $I_n$  la matrice unité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

On considère un  $n$ -uplet  $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$  de  $\mathbb{C}^n$  et le polynôme  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ .

On note  $C$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par  $C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & (0) & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ .

On dit que  $C$  est la matrice compagnon du polynôme  $P$ .

On note  $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ .

On note  $\text{id}$  l'application identité de  $\mathbb{C}^n$  et on appelle  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  tel que  $C$  soit la matrice associée à  $f$  relativement à la base  $\mathcal{B}_0$ .

On note  $f^0 = \text{id}$  et, pour tout entier naturel  $k$ ,  $f^{k+1} = f^k \circ f$ .

1.a. Exprimer, pour tout  $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,  $f(e_i)$  en fonction de  $e_{i+1}$ .

b. En déduire :  $\forall j \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ ,  $f^j(e_1) = e_{j+1}$  et  $f^n(e_1) = -(a_0e_1 + a_1e_2 + \dots + a_{n-1}e_n)$ .

2. Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  défini par  $g = f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{id}$ .

a. Vérifier :  $g(e_1) = 0$ .

b. Montrer :  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $g \circ f^i = f^i \circ g$ .

c. En déduire :  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $g(e_i) = 0$ .

d. Montrer que le polynôme  $P$  est annulateur de l'endomorphisme  $f$ .

*Application 1* : Déterminer une matrice  $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{C})$  telle que  $A^5 = A^3 + 2A^2 + I_5$ .

e. Établir que toutes les valeurs propres de  $C$  sont des racines du polynôme  $P$ .

- 3.a.** Soit  $Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \dots + \alpha_{n-1} X^{n-1}$  un polynôme non nul et de degré inférieur ou égal à  $n - 1$ . On note  $Q(f)$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  défini par  $Q(f) = \alpha_0 \text{id} + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}$ . Calculer  $Q(f)(e_1)$ .
- b.** En déduire qu'il n'existe pas de polynôme non nul, de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  et annulateur de  $f$ .
- c.** Soit  $\lambda$  une racine du polynôme  $P$ . Il existe donc un unique polynôme  $R \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $P = (X - \lambda)R$ . Vérifier que  $(f - \lambda \text{id}) \circ R(f) = \tilde{0}$ , où  $\tilde{0}$  est l'endomorphisme nul de  $\mathbb{C}^n$ .
- d.** Conclure que toutes les racines du polynôme  $P$  sont des valeurs propres de  $C$ .
- 4.a.** Montrer que, pour tout nombre complexe  $x$ , la matrice  $(C - xI_n)$  est de rang supérieur ou égal à  $n - 1$ . En déduire que chaque sous-espace propre de  $C$  est de dimension 1.
- b.** En déduire que  $C$  est diagonalisable si et seulement si  $P$  admet  $n$  racines deux à deux distinctes.
- 5.a. Application 2 :** Montrer que la matrice  $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  est diagonalisable.
- b. Application 3 :** Montrer que la matrice  $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  n'est pas diagonalisable.
- 6.** On note  $B = {}^t C$  la matrice transposée de  $C$ .
- a.** Montrer que, pour tout nombre complexe  $t$ , la matrice  $(B - tI_n)$  est inversible si et seulement si la matrice  $(C - tI_n)$  est inversible.
- b.** En déduire que les matrices  $B$  et  $C$  ont les mêmes valeurs propres.
- c.** Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $B$ . Déterminer une base du sous-espace propre de  $B$  associé à  $\lambda$ .
- d.** On suppose que le polynôme  $P$  admet  $n$  racines  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  deux à deux distinctes. Montrer que  $B$  est diagonalisable et en déduire que la matrice  $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$  est inversible.
- 7.** Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  admettant  $n$  valeurs propres  $\mu_1, \dots, \mu_n$  deux à deux distinctes. L'endomorphisme  $u$  est donc diagonalisable et on note  $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $u$  respectivement associés à  $\mu_1, \dots, \mu_n$ .
- a.** Soit  $a = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$ . Montrer que la famille  $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$  est une base de  $E$ .
- b.** Montrer qu'il existe un polynôme  $P_1 = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \dots + b_1X + b_0$  tel que la matrice associée à  $u$  relativement à la base  $\mathcal{B}_a = (a, u(a), \dots, u^{n-1}(a))$  soit la matrice compagnon du polynôme  $P_1$ .



## ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

EM LYON 2006 VOIE S

CORRIGE

## PROBLEME I

## PRELIMINAIRES

1-a)

Par croissances comparées,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n+2} \exp(-t^2) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2)^{\frac{n+2}{2}} \exp(-t^2) = 0$ . Ce qui se traduit par :

$$t^n \exp(-t^2) = o_{(+\infty)}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

1-b)

Posons  $f_n(t) = t^n \exp(-t^2)$ . On constate facilement que  $f_n$  a la même parité que  $n$  : **l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t) dt$  converge si et seulement si l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  converge.**

Puisque l'intégrale  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$  converge, on en déduit par négligeabilité que l'intégrale  $\int_1^{+\infty} f_n(t) dt$  converge, donc que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$  converge (la fonction  $f_n$  étant continue sur  $\mathbb{R}^+$ , l'intégrale  $\int_0^1 f_n(t) dt$  existe)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale } \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \exp(-t^2) dt \text{ est convergente}$$

2)

Si  $P(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$  avec  $a_n \neq 0$ , on a  $P(t) \underset{(+\infty)}{\sim} a_n t^n$ , donc  $|P(t)| \underset{(\pm\infty)}{\sim} |a_n t^n|$  et puisque  $\exp(-t^2) > 0$ , on a également  $|P(t) \exp(-t^2)| \underset{(\pm\infty)}{\sim} |a_n t^n| \exp(-t^2)$ . La fonction  $t \mapsto |a_n t^n| \exp(-t^2)$  est une fonction paire, donc la convergence de  $\int_0^{+\infty} |a_n t^n| \exp(-t^2) dt = \int_0^{+\infty} |a_n| t^n \exp(-t^2) dt$  implique celle de  $\int_{-\infty}^{+\infty} |a_n t^n| \exp(-t^2) dt$

En changeant  $a_n$  en  $|a_n|$ , on vient de voir, l'intégrale  $\int_0^{+\infty} |a_n| t^n \exp(-t^2) dt$  converge, donc l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |a_n t^n| \exp(-t^2) dt$  est convergente.

Par la règle d'équivalence des fonctions continues positives, on conclut que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} |P(t)| \exp(-t^2) dt$  est convergente.

L'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) \exp(-t^2) dt$  est absolument convergente, donc convergente

**3-a)** \_\_\_\_\_

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  ; posons  $I_{n+2}(a, b) = \int_a^b t^{n+2} \exp(-t^2) dt$  et intégrons par parties.

$u(t) = t^{n+1} \implies u'(t) = (n+1)t^n$  ;  $v'(t) = t \exp(-t^2) \iff v(t) = -\frac{1}{2} \exp(-t^2)$ . les fonctions  $u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , ce qui légitime l'intégration par parties.

$$\begin{aligned} I_{n+2}(a, b) &= \left[ -\frac{t^{n+1} \exp(-t^2)}{2} \right]_a^b + \frac{n+1}{2} \int_a^b t^n \exp(-t^2) dt \\ &= -\frac{b^{n+1} \exp(-b^2)}{2} + \frac{a^{n+1} \exp(-a^2)}{2} + \frac{n+1}{2} \int_a^b t^n \exp(-t^2) dt \end{aligned}$$

Par croissances comparées,  $\lim_{a \rightarrow -\infty} a^{n+1} \exp(-a^2) = 0$  et  $\lim_{b \rightarrow +\infty} b^{n+1} \exp(-b^2) = 0$  ;

de plus  $\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b t^n \exp(-t^2) dt = I_n$  qui existe : on peut donc passer à la limite dans l'égalité précédente en faisant tendre  $a$  vers  $-\infty$  et  $b$  vers  $+\infty$ . On obtient le relation

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$$

**3-b)** \_\_\_\_\_

On sait (c'est un résultat du cours) que lorsqu'une fonction  $f$  est impaire et que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$  converge, cette intégrale vaut 0

$$\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = 0$$

**3-c)** \_\_\_\_\_

Montrons l'égalité par récurrence:

**Initialisation** : pour  $p = 0$ , on nous donne  $I_0 = \sqrt{\pi}$  ;  $\frac{(2 \times 0)!}{2^0 \cdot 0!} \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}$  : l'égalité est satisfaite.

**Hérédité** : supposons que, pour un entier  $p$  donné on ait :  $I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} \cdot p!} \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2} I_{2p} \\ &= \frac{2p+1}{2} \frac{(2p)!}{2^{2p} \cdot p!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1} p!} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+1} p! 2(p+1)} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{2(p+1)!}{2^{2(p+1)} (p+1)!} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

La propriété est héréditaire :

par principe du raisonnement par récurrence :  $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} \cdot p!} \sqrt{\pi}$