BANQUE COMMUNE D'EPREUVES

Concepteurs : H.E.C. – E.S.C.P. – E.A.P.

CODE EPREUVE :

283

CCIP_M2_S

OPTION : SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 10 Mai 2006, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés concernant le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n, ($n \geqslant 1$), à coefficients réels fixés ou aléatoires.

Dans les parties II et III, les polynômes considérés sont à coefficients réels et on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.

Pour toute fonction Ψ dérivable sur son domaine de définition, la dérivée de Ψ est notée Ψ'.

Les quatre parties du problème sont, dans une large mesure, indépendantes.

Partie I. Nombre de racines réelles d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

On considère dans cette partie, deux variables aléatoires réelles X_0 et X_1 définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi.
Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^2 + X_1(\omega)y + X_0(\omega)$$

On désigne par $M(\omega)$ *le nombre de racines réelles de* Q_ω.

1. Montrer que l'application M qui, à tout ω de Ω associe $M(\omega)$, est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Soit Z une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in]0,1[$).
On suppose dans cette question que X_0 et X_1 suivent la même loi que $2Z - 1$.

a) Déterminer la loi de X_0.

b) Déterminer la loi de M et calculer son espérance $E(M)$.

Dans les questions suivantes, on suppose que X_0 *et* X_1 *suivent une même loi exponentielle de paramètre* $1/2$.
On pose : $Y_0 = -4X_0$, $Y_1 = X_1^2$, $Y = Y_1 + Y_0$, et on note F_{Y_0}, F_{Y_1} et F_Y, les fonctions de répartition de Y_0, Y_1 et Y, respectivement.

3. Montrer que l'on a, pour tout x réel :

$$F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\sqrt{x}/2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_{Y_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{x/8} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En déduire l'expression d'une densité f_{Y_0} de Y_0 et d'une densité f_{Y_1} de Y_1.

4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \times \exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{4}+\sqrt{t}\right)\right]$, où exp désigne la fonction exponentielle.

a) Établir la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire qu'une densité f_Y de la variable aléatoire Y est donnée, pour tout x réel, par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{32}e^{x/8}\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{32}e^{x/8}\displaystyle\int_x^{+\infty} g(t)dt & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

5. On désigne par Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée, réduite.

a) Justifier la validité du changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$.

b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = 4\sqrt{e}\int_1^{+\infty} e^{-v^2/2}dv$, et donner, pour tout réel x négatif, l'expression de $f_Y(x)$ en fonction de Φ.

c) Montrer que, pour tout réel x positif, on a : $f_Y(x) = \dfrac{\sqrt{2\pi e}}{8}e^{x/8}\left[1-\Phi\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}+1\right)\right]$.

d) Déterminer la loi de M et son espérance $E(M)$ (on fera intervenir le nombre $\Phi(1)$).

Partie II. Suites de Sturm

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, et soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme normalisé ($a_n = 1$) donné, à coefficients réels. *On suppose que toutes les racines réelles de P sont simples.*

L'objectif de cette partie est de décrire un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P appartenant à un intervalle donné $[a, b]$.

On associe au polynôme P, la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$ de polynômes définie de la manière suivante : $R_0 = P, R_1 = -P'$, et pour tout entier j tel que $R_{j+1} \neq 0$, le polynôme R_{j+2} est l'opposé du reste de la division euclidienne de R_j par R_{j+1}. Si $R_{j+1} = 0$, on pose $R_{j+2} = 0$.

1. Montrer qu'il existe un entier k ($k \geqslant 2$), tel que $R_k = 0$. On note R_m, ($m \geqslant 1$), le dernier polynôme non nul de la suite $(R_i)_{i\geqslant 0}$.

Dans toute cette partie, on pose :

$$\begin{cases} R_0 = S_1R_1 - R_2 \\ R_1 = S_2R_2 - R_3 \\ \quad\vdots \\ R_{m-2} = S_{m-1}R_{m-1} - R_m \\ R_{m-1} = S_mR_m \end{cases}$$

2. a) Montrer que s'il existe un entier j de $[\![0, m-1]\!]$ et un réel x_0 tels que $R_j(x_0) = R_{j+1}(x_0) = 0$, alors $P(x_0) = P'(x_0) = 0$.

b) En déduire que le polynôme R_m n'admet pas de racine réelle.

c) Soit j un entier de $[\![1, m-1]\!]$. Montrer que si x_0 est une racine réelle de R_j, alors $R_{j-1}(x_0) \times R_{j+1}(x_0) < 0$.

3. Soit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_t)$ une t-liste ($t \geqslant 2$) de nombres réels non tous nuls. On ôte de s tous les éléments nuls en préservant l'ordre, et on obtient ainsi une p-liste ($p \leqslant t$) $\widehat{s} = (\widehat{s_1}, \widehat{s_2}, \ldots, \widehat{s_p})$. On appelle *nombre de changements de signe de s*, le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ défini par : $\mathcal{E} = \{i \in [\![1, p-1]\!] \mid \widehat{s_i}\widehat{s_{i+1}} < 0\}$. Si $p = 1$, on dit que le nombre de changements de signe est nul.
Par exemple, si $s = (0, 3, 0, 5, -3, 2)$, on a : $\widehat{s} = (3, 5, -3, 2)$, et le nombre de changements de signe est égal à 2.

Pour tout réel x, on note respectivement $C_1(x)$, $C_2(x)$ et $C(x)$, le nombre de changements de signe du couple $(R_0(x), R_1(x))$, de la m-liste $(R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$, et de la $(m+1)$-liste $(R_0(x), R_1(x), R_2(x), \ldots, R_m(x))$.
On désigne par x_0 une racine réelle du polynôme P.

a) En étudiant les variations de P au voisinage de x_0, montrer qu'il existe un réel $\delta_1 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_1[$, on a : $C_1(x_0 + h) - C_1(x_0 - h) = 1$.

b) À l'aide de la question 2. c), montrer qu'il existe un réel $\delta_2 > 0$ tel que, si $h \in]0, \delta_2[$, on a : $C_2(x_0 + h) = C_2(x_0 - h)$ (on distinguera les deux éventualités : soit, x_0 n'est racine d'aucun des polynômes $R_1, R_2, \ldots, R_m$, soit, il existe un entier j de $[\![1, m-1]\!]$ tel que $R_j(x_0) = 0$).

c) Déduire des deux questions précédentes que pour $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ et $h \in]0, \delta[$, on a $C(x_0+h) - C(x_0-h) = 1$, et que si a et b sont deux réels qui ne sont pas racines de P et qui vérifient $a < b$, alors le nombre de racines réelles de P dans $[a, b]$ est égal à $C(b) - C(a)$.

4. a) Soit α une racine (réelle ou complexe) de P. Montrer que si $|\alpha| \geqslant 1$, alors $|\alpha|^n \leqslant |\alpha|^{n-1} \times \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$. En déduire, pour toute racine α de P, l'inégalité : $|\alpha| \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$.

b) Écrire en français, un algorithme permettant de déterminer le nombre de racines réelles de P.

5. On définit en Pascal

```
const n = ... ;
Type tab = array[1..n] of real ;
Var T : tab ;
```

Écrire une fonction Pascal dont l'en-tête est `Function nbchgs(T : tab) : integer` qui donne le nombre de changements de signe dans la suite de réels (`T[1], T[2],..., T[n]`).
On tiendra compte du fait que le tableau `T` peut contenir des éléments nuls. La fonction `nbchgs` n'utilisera que le tableau `T` et aucun autre tableau auxiliaire. On expliquera en français la démarche utilisée.

Partie III. Un majorant du nombre de racines réelles de P

Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(X) = v_m X^m + v_{m-1} X^{m-1} + \cdots + v_1 X + v_0$, avec $v_m \neq 0$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On note $V^\star$ le polynôme réciproque du polynôme V, défini par : $V^\star(X) = v_0 X^m + v_1 X^{m-1} + \cdots + v_{m-1} X + v_m$. Soit n un entier de $\mathbb{N}^*$. On considère l'application T qui, à tout polynôme P de degré n, normalisé, à coefficients réels, $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, associe le polynôme $T(P)$ défini par $T(P)(X) = XP'(X)$.

On désigne par $N_0(P)$ le nombre de racines non nulles de P dans l'intervalle $[-1, 1]$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, par $N_1(P)$ le nombre de racines de P dans $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ comptées avec leurs ordres de multiplicité, et par $N(P)$ le nombre de racines réelles de P comptées avec leurs ordres de multiplicité.

1. a) Établir, à l'aide du théorème de Rolle, l'inégalité : $N_1(P) \leqslant N_1(T(P)) + 2$.

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $T^k = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (k fois). Montrer que $N_1(P) \leqslant N_1(T^k(P)) + 2k$.

2. a) Montrer que pour tout réel x non nul, on a $P^\star(x) = x^n P\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

b) Montrer que $N_1(P) = N_0(P^\star)$.

3. Pour tout réel x et pour tout entier naturel k non nul, on pose :
$Q_k(x) = 1 + a_{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^k x + a_{n-2}\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)^k x^2 + \cdots + a_1\left(1 - \dfrac{n-1}{n}\right)^k x^{n-1}$. Montrer que $(T^k(P))^\star = n^k Q_k$.

4. a) Établir, pour tout réel y de $[0, 1]$, l'inégalité : $(1 - y)e^y \leqslant 1$.

b) On **admet** la propriété suivante : soit r et ρ deux réels tels que $0 < r < \rho$. On note $D_\rho = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leqslant \rho\}$. Soit U un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $U(0) \neq 0$. Soit μ un réel strictement positif tel que pour tout z de D_ρ, $|U(z)| \leqslant \mu$. Alors, le nombre de racines réelles de U comptées avec leurs ordres de multiplicité, dans l'intervalle $[-r, r]$, est majoré par le réel : $\dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{\rho}{r}\right)} \times \ln\left(\dfrac{\mu}{|U(0)|}\right)$.

En appliquant cette propriété au polynôme Q_k avec $r = 1$ et $\rho = e^{k/n}$, ($k \in \mathbb{N}^*$), déduire des questions précédentes que pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on a : $N_1(P) \leqslant 2k + \dfrac{n}{k}\ln(L(P))$, avec $L(P) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} |a_i|$.

c) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\psi(x) = 2x + \dfrac{\theta}{x}$, où θ est un paramètre réel positif.

i) Étudier les variations de ψ.

ii) Montrer que $\psi(\sqrt{\theta/2} + 1) \leqslant 2 + 2\sqrt{2\theta}$.

iii) En déduire l'inégalité : $N_1(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n\ln(L(P))}$.

d) En supposant $a_0 \neq 0$, on démontrerait de même (et on admettra dans la suite du problème) que :

$$N_0(P) \leqslant 2 + 2\sqrt{2n\ln\left(\frac{L(P)}{|a_0|}\right)}$$

Conclure en donnant un majorant de $N(P)$, fonction des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

Partie IV. Nombre de racines réelles d'un polynôme de degré n à coefficients aléatoires

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère dans cette partie, les variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi de Poisson de paramètre λ, strictement positif.
Pour tout ω de Ω, on considère le polynôme Q_ω d'indéterminée y, défini par :

$$Q_\omega(y) = y^n + X_{n-1}(\omega)y^{n-1} + \cdots + X_1(\omega)y + 1$$

Soit $M_n(\omega)$ le nombre de racines réelles de Q_ω. On admet que l'application $M_n : \omega \mapsto M_n(\omega)$ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. On définit la variable aléatoire L_n par : $L_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Soit $Z_n = L_n - 2$. Rappeler la loi de Z_n.

2. À l'aide des résultats de la partie III, montrer que pour tout ω de Ω, on a :

$$M_n(\omega) \leqslant 4 + 4\sqrt{2n} \times \sqrt{\ln(Z_n(\omega) + 2)}$$

3. Soit h une fonction de classe C^2, concave sur $\mathbb{R}^+$. Soit W une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose l'existence des espérances $E(W)$ et $E(h(W))$.

a) Montrer que, pour tout couple (x_0, x) de réels positifs, on a : $h(x) \leqslant h'(x_0)(x - x_0) + h(x_0)$.

b) En prenant $x_0 = E(W)$, établir l'inégalité suivante : $E(h(W)) \leqslant h(E(W))$.

4. a) Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\varphi(x) = \sqrt{\ln(x+2)}$ est concave sur $\mathbb{R}^+$.

b) Soit a un réel positif. Montrer que la série de terme général $\sqrt{\ln(k+2)} \times \dfrac{a^k}{k!}$ est convergente.

5. a) Prouver l'existence de l'espérance $E(M_n)$.

b) Montrer que, pour tout réel β strictement supérieur à $1/2$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(M_n)}{n^\beta} = 0$$

*** FIN ***

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2006

COMMUNE 2006 VOIE S

CORRIGE

PARTIE I
Nombre de racines d'un polynôme du second degré à coefficients aléatoires

1)

Considérons le discriminant aléatoire $\Delta = X_1^2 - 4X_0$. c'est une variable définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$\forall \omega \in \Omega,\ M(\omega) \in \{0,1,2\}$. M sera une variable aléatoire si et seulement si $\forall k \in \{0,1,2\},\ (M = k) \in \mathcal{A}$

$(M = 0) = (\Delta < 0) \in \mathcal{A}$ puisque Δ est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; de même pour $(M = 1)$ et $(M = 2)$.

$$\boxed{M \text{ est une variable aléatoire définie sur } (\Omega, \mathcal{A}, P)}$$

2–a)

$$\boxed{\begin{array}{l} X_0(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ et } (X_0 = 1) = (Z = 1), \text{ donc} \\ P(X_0 = 1) = p \text{ et } P(X_0 = -1) = 1 - p(X_0 = 1) = 1 - p \end{array}}$$

2–b)

Remarquons que $X_1^2 = 1$, donc $\Delta = 1 - 4X_0$. **On ne pourra jamais avoir $\Delta = 0$ puisque $1 - 4X_0$ prend les valeurs 5 ou -3.** $\boxed{M(\Omega) = \{0, 2\}}$

$(M = 0) = (\Delta < 0) = (X_0 = 1)$, donc $P(M = 0) = p$ et par conséquent, $P(M = 2) = 1 - p$

$$\boxed{\text{Il en résulte que } E(M) = 2(1 - p)}$$

Rappelons que la fonction de répartition de X_0 (comme de X_1) est l'application F définie par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x}{2}) & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ et l'on prendra comme densité f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{2}) & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

- **Calcul de F_{Y_1}**

On peut remarquer que $Y_1(\Omega) = \mathbb{R}^+$, puisque $Y_1 = X_1^2 \ge 0$

Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ F_{Y_1}(x) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ F_{Y_1}(x) = P(X_1^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X_1 \leq \sqrt{x})$, puisque $X_1 \leq x \Longleftrightarrow |X_1| \leq \sqrt{x}$ (**la fonction racine est strictement croissante sur** $\mathbb{R}^+$) et que si a est un réel positif (ou nul), $|x| \leq a \Longleftrightarrow -\sqrt{a} \leq x \leq \sqrt{x}$.

$F_{Y_1}(x) = F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x}) = 1 - \exp(-\frac{\sqrt{x}}{2})$ puisque F est nulle sur $\mathbb{R}_-$

$$\boxed{\text{Conclusion : } F_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{\sqrt{x}}{2}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{(les deux expressions coïncident pour } x = 0)}$$

- **Calcul de** F_{Y_0}

Remarquons que $Y_0(\Omega) = \mathbb{R}_-$ puisque $Y_0 = -4X_0$ et $X_0(\Omega) = \mathbb{R}_+$

Donc $\forall x \geq 0,\ F_{Y_0}(x) = 1$; en effet $P(Y_0 \leq x) = P(-4X_0 \leq x) = P(\Omega)$ car $-4X_0 \leq 0 \leq x$

Si $x \leq 0$, continuons le calcul précédent

$$\begin{aligned} F_{Y_0}(x) &= P(-4X_0 \leq x) = P(X_0 \geq -\tfrac{x}{4}) \\ &= 1 - P(X_0 < -\tfrac{x}{4}) = 1 - P(X_0 \leq -\tfrac{x}{4}) \\ &\qquad \text{puisque } X_0 \text{ est à densité : elle ne charge pas les points} \\ &= 1 - F(-\tfrac{x}{4}) \end{aligned}$$

Pour $x \leq 0,\ F_{Y_1}(x) = 1 - (1 - \exp(-\frac{1}{2}(-\frac{x}{4})) = \exp(\frac{x}{8})$

$$\boxed{\text{En résumé : } F_{Y_0}(x) = \begin{cases} \exp(\frac{x}{8}) & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{(les deux expressions coïncident pour } x = 0)}$$

- Pour déterminer une densité de ces deux variables, il faut s'assurer que ce sont bien des variables à densité (on sait, par théorème que ce sont des variables aléatoires, mais on ne connait pas leur type). Pour cela, on va étudier, d'un peu plus près, les propriétés des deux fonctions de répartition

- **Etude de** F_{Y_1}

F_{Y_1} est manifestement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

$\lim_{x\to 0} F_{Y_1}(x) = 0$ sans problème, donc F_{Y_1} est continue sur $\mathbb{R}$. Comme c'est une fonction de répartition d'une variable aléatoire, elle est croissante, $\lim_{x\to -\infty} F_{Y_1}(x) = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} F_{Y_1}(x) = 1$, ce qui se vérifie sans problème. Maintenant on peut affirmer que Y_1 est une variable à densité. On prendra pour densité $f_{Y_1} = F'_{Y_1}$ sur $\mathbb{R}^*$ (là où F_{Y_1} est dérivable) et nous choisirons $f_{Y_1}(0) = 0$, ce qui donne

$$\boxed{f_{Y_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} \exp(-\frac{\sqrt{x}}{2}) & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

- Le même raisonnement montrera que F_{Y_0} est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$, donc compte tenu que c'est une fonction de répartition, on concluera que Y_0 est une variable à densité et la même démarche nous conduira à prendre pour densité

$$\boxed{f_{Y_0}(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \exp(\frac{x}{8}) & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

Remarque : Il est clair que la place des inégalités strictes et larges n'a aucune importance.

4–a)

La fonction $t \longmapsto -\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t})$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$;

la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, donc par composition la fonction $t \longmapsto \exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t}))$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. l La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque que c'est l'inverse de la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ qui est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$. Il en résulte que la fonction $g\ :\ t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t}))$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues.

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} g(t)dt \text{ est impropre en } 0 \text{ et en } +\infty$$

- **Etude en** 0

$\lim\limits_{t\to 0^+} -\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t}) = 0$, donc par continuité de l'exponentielle en 0,

$\lim\limits_{t\to 0^+} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t})) = 1$; ce qui veut dire aussi : $\exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t})) \underset{(0^+)}{\sim} 1$, donc

$$\boxed{g(t) \underset{(0^+)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}}$$

D'après le critère de Riemann, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente (l'exposant vaut $\frac{1}{2}<1$)

Par la règle d'équivalence des fonctions continues positives, on conclut

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 g(t)dt \text{ est convergente}}$$

- **Etude en** $+\infty$

$\forall t>0,\ -\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t}) = -\frac{t}{8} - \frac{\sqrt{t}}{2} < -\frac{t}{8}$.

Par croissance de l'exponentielle, $\exp(-\frac{1}{2}(\frac{t}{4}+\sqrt{t})) < \exp(-\frac{t}{8})$. En multipliant cette inégalité par $\dfrac{1}{\sqrt{t}}>0$, on obtient (en se souvenant que tout est positif) :

$$0 < g(t) < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}}\exp(-\frac{t}{8})}_{h(t)} \qquad \textbf{(1)}$$

$t^2h(t) = t^{\frac{3}{2}}\exp(-\frac{t}{8})$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\frac{3}{2}}\exp(-\frac{t}{8}) = 0$ **par croissances comparées** ; il en résulte que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2h(t) = 0$, c'est-à-dire : $h(t) \underset{(+\infty)}{=} \circ\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Par négligeabilité des fonctions continues, positives ou nulles, puisque l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(t)dt$ est convergente.

D'après l'encadrement **(1)** on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est convergente.