



ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES
OPTION ECONOMIQUE

MERCREDI 16 MAI 2001, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

**"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique
est interdit pendant cette épreuve".**

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants.

N.B. Il est demandé au candidat d'indiquer, **impérativement**, son numéro d'inscription sur les copies.

EXERCICE 1

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0; 1]$ sur un ensemble que l'on déterminera.

On note f^{-1} la bijection réciproque de f . Donner les tableaux des variations de f et de f^{-1} .

2. Vérifier qu'il existe dans $[0; 1]$ un et un seul réel noté α tel que $\alpha e^\alpha = 1$.

Montrer que $\alpha \neq 0$.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \end{cases}$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n , u_n existe et $u_n \in]0; 1]$.

4. (a) Montrer que pour tout réel x de $[0; 1]$, $f(x) - x \geq 0$.

Vérifier que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et qu'elle a pour limite 0.

5. On se propose de préciser ce résultat en déterminant un équivalent de u_n .

On pose pour tout entier naturel n : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

(a) Montrer que pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n e^{-u_{n+1}}$

(b) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}$

(c) Montrer que $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, et en déduire que la série de terme général u_n est convergente. On note L sa somme. Montrer que $\alpha \leq L \leq 2$.

(d) Montrer finalement que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-L}}{2^n}$.

EXERCICE 2

On donne les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -14 \\ 6 & 6 & -16 \\ 5 & 5 & -14 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -16 \\ 0 & 4 & -8 \\ 4 & 4 & -12 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi que les matrices colonne :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que V_1 , V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de A .
A quelles valeurs propres sont-ils associés ?

2. (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
(b) Justifier la relation $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

On note D cette matrice diagonale.

(c) Calculer la matrice $\Delta = P^{-1}BP$ et vérifier qu'elle est diagonale.

3. On se propose de calculer les matrices colonne X_n définies par les relations:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, X_{n+2} = AX_{n+1} + BX_n.$$

A cet effet, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$: $Y_n = P^{-1}X_n$ et on pose également $Y_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

- (a) Montrer que $Y_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
(b) Montrer que pour tout entier naturel n , $Y_{n+2} = DY_{n+1} + \Delta Y_n$.
(c) Montrer alors que pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+2} = u_{n+1} \\ v_{n+2} = 4v_n \\ w_{n+2} = -4w_{n+1} - 4w_n \end{cases}$$

En déduire les expressions explicites de u_n , v_n et w_n en fonction de n .

- (d) Donner finalement la matrice X_n en fonction de n .

EXERCICE 3

1. On pose pour tout entier naturel n non nul l'intégrale : $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt$

- (a) Calculer pour $A \geq 1$ l'intégrale $\int_1^A \frac{\ln t}{t} dt$ et en déduire que I_1 est divergente.
- (b) Montrer grâce à une intégration par parties que pour tout entier $n \geq 2$, l'intégrale I_n converge et vaut $\frac{1}{(n-1)^2}$.
- (c) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2; +\infty[$ par $f(t) = \frac{\ln t}{t^2}$ et donner sa limite en $+\infty$. (On donne $\sqrt{e} \approx 1,65$)
- (d) En déduire grâce à I_2 que $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ converge (On ne cherchera pas à calculer cette série).

2. On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :
$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{4 \ln t}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Montrer que g est continue sur \mathbb{R} et constitue une densité de probabilité. (On utilisera les résultats de la question 1.(b).)

On nomme dans toute la suite X une variable aléatoire admettant la densité g .

- (b) Etudier l'existence et la valeur éventuelles de l'espérance $E(X)$.
- (c) La variable X admet-elle une variance ?

3. Etude d'une variable discrète définie à partir de X .

- (a) On considère la fonction G définie sur \mathbb{R} par
$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - \frac{2 \ln t}{t^2} - \frac{1}{t^2} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} puis justifier que G est la fonction de répartition de la variable aléatoire X .

On note Z la variable aléatoire discrète définie par :

$$Z(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad Z = [X], \text{ partie entière de } X.$$

On rappelle que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}$, $[x] = k \Leftrightarrow k \leq x < k+1$.

- (b) Montrer que pour tout entier naturel k , $P(Z = k) = G(k+1) - G(k)$.
- (c) En déduire par récurrence sur l'entier naturel n que :
$$\sum_{k=0}^n kP(Z = k) = -(n+1)[1 - G(n+1)] + \sum_{k=0}^n (1 - G(k+1))$$
- (d) Montrer que $(1 - G(k))$ est équivalent en $+\infty$ à $\frac{2 \ln k}{k^2}$
- (e) Déduire de l'ensemble des résultats obtenus que Z admet une espérance.



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

ESC

CORRIGE

EXERCICE-I

QUESTION-1

La fonction f est continue, dérivable sur $[0, 1]$ comme produit de fonctions dérivables.

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = 2(x+1)e^x.$$

Le tableau de variations de f est immédiat.

x	0	1
$f'(x)$	+	
f	0	$2e$

La fonction f est continue, strictement croissante sur $[0, 1]$: elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $[0, 2e]$, donnée par le tableau de variations.

La bijection réciproque f^{-1} est définie sur $[0, 2e]$, elle est **strictement croissante comme f** ; de plus f' n'est jamais nulle sur $[0, 1]$, donc f^{-1} est dérivable sur $[0, 2e]$. On obtient le tableau de variations de f^{-1} facilement.

x	1	$2e$
$(f^{-1})'(x)$	+	
f^{-1}	0	1

QUESTION-2

La fonction f étant une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 2e]$, tout élément de $[0, 2e]$ admet un unique antécédent dans $[0, 1]$ par f . En particulier 2 admet un unique antécédent α , qui vérifie :

$$f(\alpha) = 2 \iff 2\alpha e^\alpha = 2 \iff \alpha e^\alpha = 1.$$

$$\exists ! \alpha \in [0, 1] / \alpha e^\alpha = 1.$$

Remarque : f^{-1} est strictement croissante sur $[0, 2e]$;

$0 < 2 \implies f^{-1}(0) < f^{-1}(2)$. Or $f^{-1}(0) = 0$ puisque $f(0) = 0$ et $f^{-1}(2) = \alpha$ puisque $f(\alpha) = 2$.

Conclusion : $0 < \alpha$

QUESTION-3

Montrons par récurrence la propriété P_n " $u_n \in]0, 1]$. "

Initialisation :

$u_0 = \alpha \in]0, 1]$ d'après la question précédente.

Hérédité : supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$, tel que P_n soit vérifiée.

Puisque $]0, 1] \subset]0, 2e]$ et que f^{-1} est strictement croissante sur $]0, 2e]$, on conclut que

$$0 < u_n \leq 1 \implies f^{-1}(0) < f^{-1}(u_n) \leq f^{-1}(2e).$$

On sait déjà que $f^{-1}(0) = 0$; de même $f^{-1}(2e) = 1$ puisque $f(1) = 2e$. L'encadrement précédent s'écrit alors $0 < u_{n+1} \leq 1$. La propriété est héréditaire : **d'après le principe du raisonnement par récurrence, on conclut**

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} \leq 1.$$

QUESTION-4

4-a)

$$\forall x \in [0, 1], f(x) - x = x(2e^x - 1).$$

Or $x \geq 0 \implies e^x \geq 1$ **par croissance de l'exponentielle** ; donc $2e^x \geq 2 > 1$. Il s'ensuit que $(2e^x - 1) > 1$ sur $[0, 1]$. Et puisque $x \geq 0$, $x(2e^x - 1) \geq 0$.

$$\forall x \in [0, 1], f(x) - x \geq 0.$$

Précisons un peu :

Si $x = 0$, alors $x(2e^x - 1) = 0$, ie $f(x) - x = 0$.

Si $x > 0$, alors $2e^x - 1 \geq 1 > 0$, donc $f(x) - x = x(2e^x - 1) > 0$.

$$\forall x \in [0, 1], f(x) - x \geq 0 \text{ et } f(x) - x = 0 \text{ si et seulement si } x = 0.$$

4-b)

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f^{-1}(u_n) \iff u_n = f(u_{n+1})$. Alors

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_{n+1} - f(u_{n+1})$. Or $u_{n+1} \in]0, 1]$, d'après la question 3, donc d'après le a) $u_{n+1} - f(u_{n+1}) < 0$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n < 0 ; \text{ la suite } (u_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

4-c)

D'après le **théorème des suites monotones, bornées, la suite (u_n) est décroissante, minorée par 0, donc elle converge.**

Si on note ℓ sa limite, $0 < u_n \leq 1 \implies 0 \leq \ell \leq 1$ car n'oublions pas qu'à la limite les inégalités strictes deviennent larges.

Or f est continue sur $[0, 1]$, donc elle est continue au point ℓ et l'égalité $u_n = f(u_{n+1}) \implies \ell = f(\ell)$. D'après la question 4-a), le seul point $\ell \in [0, 1]$ qui convient est $\ell = 0$.

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.