FONCTION DZETA 2 DE RIEMANN

ENONCE DE L'EXERCICE

ENONCE−26

On étudie dans cet exercice la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

A cet effet, on introduit pour tout entier $k \geq 0$, les deux intégrales suivantes :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)dt \text{ et } J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)dt$$

1) Convergence de la suite (J_k/I_k)

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$:

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t)$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 0$:

$$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$$

c) Exprimer I_{k+1} en fonction de I_k en intégrant par parties l'intégrale I_{k+1}.

d) Déduire des résultats précédents que (J_k/I_k) tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

2) Convergence et limite de la suite (S_n)

a) Exprimer I_k en fonction de J_k et J_{k-1} en intégrant par parties $I_k (k \geq 1)$.

b) En déduire la relation suivante pour $k \geq 1$:

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$$

c) Calculer I_0 et J_0 puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

d) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

En déduire un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, puis de $S - S_n$ et montrer que

$$0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$$

Autrement dit $S_n + \frac{1}{n}$ constitue une valeur approchée de S à $\frac{1}{n^2}$ près.

e) Ecrire un programme Pascal calculant une valeur approchée du nombre S à 10^{-6} près.

CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 26

EXERCICE

QUESTION−1

a) Cette inégalité est due à la concavité de la fonction sin sur l'intervalle $I = [0; \frac{\pi}{2}]$.

Rappelons qu'une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle et dont la dérivée seconde est négative est concave : géométriquement cela veut dire que pour tous points A et B de la courbe représentative de f, la portion de courbe comprise entre A et B est au dessus du segment $[A; B]$.

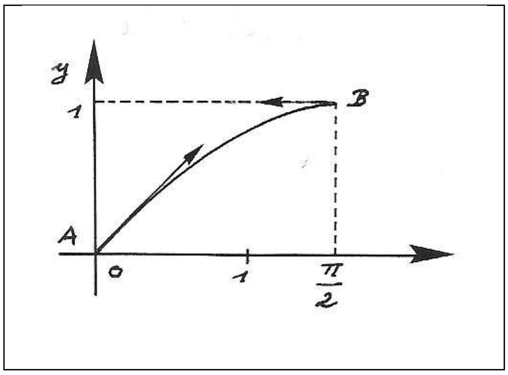
Appliquons ce résultat à la fonction sin sur l'intervalle I.

$\sin'' = -\sin \leq 0$ sur I ; donc sin est effectivement concave sur I.

Considérons les points A et B de coordonnées respectives $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$. On vérifie facilement qu'ils sont sur la courbe représentative de sin et que la droite (A, B) a pour équation $y = \dfrac{2}{\pi}x$. Pour cela, on peut vérifier que $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$ satisfont à l'équation de la droite.

La concavité donne alors :

$\forall t \in I,\ \sin t \geq \dfrac{2}{\pi} t$; inégalité équivalente à : $\boxed{\forall t \in I,\ t \leq \frac{\pi}{2} \sin t}$ car $\frac{\pi}{2} > 0$.



• Il existe une autre méthode plus traditionnelle qui consiste à étudier la fonction différence, d, définie sur I par $d(t) = -t + \frac{\pi}{2} \sin t$.

$$\begin{aligned} d'(t) &= -1 + \frac{\pi}{2} \cos t \\ d''(t) &= -\frac{\pi}{2} \sin t \leq 0 \quad \text{sur } I. \end{aligned}$$

On obtient les tableaux de variations suivants :

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$d''(t)$		$-$		$-$	
$d'(t)$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$d'(t)$		$+$		$-$	
d	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On constate que $d(t) \geq 0$ sur I, ce qui est l'inégalité demandée.