



## EXERCICES DE MATHÉMATIQUES



### FONCTION DZETA 2 DE RIEMANN

#### ENONCE DE L'EXERCICE

#### ENONCE-26

On étudie dans cet exercice la suite  $(S_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$$

A cet effet, on introduit pour tout entier  $k \geq 0$ , les deux intégrales suivantes :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) dt \text{ et } J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t) dt$$

#### 1) Convergence de la suite $(J_k/I_k)$

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel  $t$  tel que  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  :

$$t \leq \frac{\pi}{2} \sin(t)$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier  $k \geq 0$  :

$$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4} (I_k - I_{k+1})$$

c) Exprimer  $I_{k+1}$  en fonction de  $I_k$  en intégrant par parties l'intégrale  $I_{k+1}$ .

d) Dédire des résultats précédents que  $(J_k/I_k)$  tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

#### 2) Convergence et limite de la suite $(S_n)$

a) Exprimer  $I_k$  en fonction de  $J_k$  et  $J_{k-1}$  en intégrant par parties  $I_k (k \geq 1)$ .

b) En déduire la relation suivante pour  $k \geq 1$  :

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$$

c) Calculer  $I_0$  et  $J_0$  puis déterminer la limite  $S$  de la suite  $(S_n)$ .

d) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier  $k \geq 2$  :

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

En déduire un encadrement de  $S_{n+p} - S_n$  pour  $n \geq 1$  et  $p \geq 1$ , puis de  $S - S_n$  et montrer que

$$0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}$$

*Autrement dit  $S_n + \frac{1}{n}$  constitue une valeur approchée de  $S$  à  $\frac{1}{n^2}$  près.*

e) Ecrire un programme Pascal calculant une valeur approchée du nombre  $S$  à  $10^{-6}$  près.

## CORRIGE DE L'EXERCICE NUMERO 26

### EXERCICE

#### QUESTION-1

a) Cette inégalité est due à la concavité de la fonction  $\sin$  sur l'intervalle  $I = [0; \frac{\pi}{2}]$ .

Rappelons qu'une fonction  $f$  deux fois dérivable sur un intervalle et dont la dérivée seconde est négative est concave : géométriquement cela veut dire que pour tous points  $A$  et  $B$  de la courbe représentative de  $f$ , la portion de courbe comprise entre  $A$  et  $B$  est au dessus du segment  $[A; B]$ .

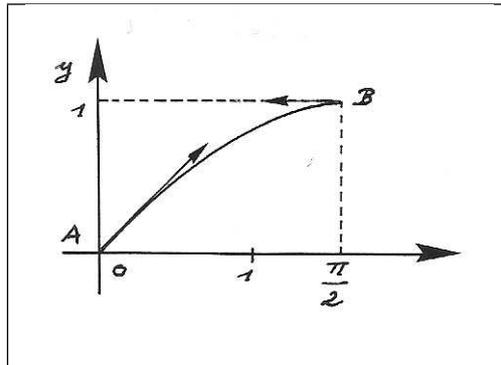
Appliquons ce résultat à la fonction  $\sin$  sur l'intervalle  $I$ .

$\sin'' = -\sin \leq 0$  sur  $I$  ; donc  $\sin$  est effectivement concave sur  $I$ .

Considérons les points  $A$  et  $B$  de coordonnées respectives  $(0,0)$  et  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ . On vérifie facilement qu'ils sont sur la courbe représentative de  $\sin$  et que la droite  $(A, B)$  a pour équation  $y = \frac{2}{\pi}x$ . Pour cela, on peut vérifier que  $(0,0)$  et  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  satisfont à l'équation de la droite.

La concavité donne alors :

$\forall t \in I, \sin t \geq \frac{2}{\pi}t$  ; inégalité équivalente à :  $\forall t \in I, t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$  car  $\frac{\pi}{2} > 0$ .



• Il existe une autre méthode plus traditionnelle qui consiste à étudier la fonction différence,  $d$ , définie sur  $I$  par  $d(t) = -t + \frac{\pi}{2} \sin t$ .

$$d'(t) = -1 + \frac{\pi}{2} \cos t$$

$$d''(t) = -\frac{\pi}{2} \sin t \leq 0 \text{ sur } I.$$

On obtient les tableaux de variations suivants :

$t$	0	$\alpha$	$\frac{\pi}{2}$
$d''(t)$	-	-	-
$d'(t)$	$\frac{\pi}{2} - 1$	$\searrow$ 0 $\swarrow$	-1
$d(t)$	+	-	-
$d$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0

On constate que  $d(t) \geq 0$  sur  $I$ , ce qui est l'inégalité demandée.