



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

INSEEC OPTION ECONOMIQUE

ENONCE

EXERCICE-1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et

l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 de matrice A dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1) Déterminer une base de $\text{Im } f$ et de $\text{Ker } f$.

2) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .

3-a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .

b) En déduire l'existence d'une matrice diagonale A' telle que $A = PA'P^{-1}$.

4) Dans cette question, on s'intéresse aux solutions de l'équation matricielle : $M^3 = A$ (*), où M est une matrice carrée réelle d'ordre 3.

a) Montrer que si M vérifie la relation (*), alors $AM = MA$.

b) On note $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; si la matrice M vérifie la relation (*), déduire de la question précédente que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de M .

c) En déduire l'existence d'une matrice diagonale M' d'ordre 3 telle que l'on ait : $M = PM'P^{-1}$. Quelle relation a-t-on entre les matrices M' et A' ? Conclure.

EXERCICE-2

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Un joueur dispose de deux dés ayant chacun six faces, le premier noté A est équilibré, le second noté B est tel que la probabilité d'apparition d'un numéro est proportionnelle à ce dernier, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in [1, 6], P(\{k\}) = \lambda \times k.$$

1-a) Montrer que $\lambda = \frac{1}{21}$.

b) Le joueur lance le dé B ; déterminer la probabilité des événements :

I : « obtenir un chiffre impair » et $P = \bar{I}$: « obtenir un chiffre pair » .

2) Dans cette question le joueur dispose d'une pièce qui amène pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Soit un entier naturel $n \geq 4$; le joueur lance en premier la pièce, si elle amène pile il lancera n fois de suite le dé A , sinon il lancera n fois de suite le dé B .

a) Quelle est la probabilité de l'événement : « obtenir le chiffre 1, uniquement aux trois premiers lancers » ?

b) Quelle est la probabilité de l'événement : « obtenir au cours des n lancers, trois fois seulement le chiffre 1 » ?

c) Soit k un entier fixé tel que $2k \leq n$.

i) On considère l'événement E : « les $(2k)$ premiers lancers amènent alternativement les chiffres 1 et 6 dans cet ordre » (le premier lancer amène le chiffre 1, le deuxième le chiffre 6, etc...). Calculer $P(E)$.

ii) On sait que l'événement E est réalisé, quelle est la probabilité que le lancer de la pièce ait donné pile ?

3) Dans cette question le joueur lance toujours le dé B et on s'intéresse à l'apparition pour la première fois de la séquence IP (on obtient pour cette séquence à un lancer un chiffre impair et au lancer suivant un chiffre pair).

On notera : I_k « le chiffre obtenu au $k^{\text{ème}}$ lancer est impair » et P_k « le chiffre obtenu au $k^{\text{ème}}$ lancer est pair ».

On définit la variable aléatoire X égale au numéro du lancer amenant le chiffre pair lors de l'apparition pour la première fois de la séquence IP. Si par exemple au cours des lancers on obtient $P_1 \cap P_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap P_5$, alors $X = 5$.

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable X ?

b) Déterminer $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; exprimer l'événement $(X = n)$ à l'aide d'événements du type P_i et I_j et montrer que :

$$\forall n \geq 2, P(X = n) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{4}{7}\right)^{k+1} \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1-k}$$

d) En déduire que : $\forall n \geq 2, P(X = n) = 4\left(\frac{3}{7}\right)^n \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 1\right]$

e) Vérifier que $\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

f) Calculer $E(X)$.

EXERCICE-3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & \text{si } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\end{cases}$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

Partie I : étude de f

1) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

2-a) Déterminer le développement limité de f en 1 à l'ordre 2. En déduire la dérivabilité de f en 1 et préciser $f'(1)$.

2-b) Etudier localement la position de C par rapport à sa tangente Δ au point d'abscisse 1.

3-a) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, calculer $f'(x)$.

b) Etudier sur $]0, +\infty[$ les variations de $\varphi : x \mapsto x - 1 - x \ln x$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f et construire dans un même repère C et Δ (on donne $\ln 2 \simeq 0.7$ et $\ln 3 \simeq 1.1$).

Partie II : étude d'une série

Soit n un entier naturel non nul ; on considère la fonction

$$f_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

1-a) Soit $x \in [0, 1[$, montrer que : $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{x^n}{1-t} dt$; en déduire :

$$\forall x \in [0, 1[, 0 \leq f_n(x) \leq x^n \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) \text{ et } \forall x \in [0, \frac{1}{2}], 0 \leq f_n(x) \leq x^n \ln 2$$

b) En déduire l'existence de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f_n(x)}{x} dx$.

c) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f_n(x)}{x} dx \leq \frac{\ln 2}{n \cdot 2^n}$$

2) Par dérivation de

$$g : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(1-x) \text{ et de } S_n : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\left(x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}\right) - f_n(x)$$

montrer que $\forall x \in [0, 1[, S_n(x) = g(x)$.

3) Justifier l'égalité : $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^k} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f_n(x)}{x} dx$.

5-a) En raisonnant par majoration, montrer que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 2^k}$ converge.

5-b) A l'aide des questions précédentes montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x-1} dx$.



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

INSEEC

CORRIGE

EXERCICE-I

QUESTION-1

- On sait que $\text{Im } f = \text{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{R}^3 . Dans le cas présent, cela donne $\text{Im } f = \text{vect}((-1, -8, 9), (0, -8, 8))$ car $f(e_2) = (0, 0, 0)$ d'après la deuxième colonne de A .

La famille $((-1, -8, 9), (0, -8, 8))$ est génératrice de $\text{Im } f$; elle est libre car les triplets ne sont pas proportionnels.

La famille $((-1, -8, 9), (0, -8, 8))$ est une base de $\text{Im } f$; $\dim \text{Im } f = 2$.

- Appliquons le théorème du rang :

$$\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{R}^3.$$

On en déduit $\dim \text{Ker } f = 3 - 2 = 1$. Or on sait que e_2 appartient à $\text{Ker } f$ puisque $f(e_2) = (0, 0, 0)$. **Le vecteur e_2 est un vecteur non nul d'un espace de dimension 1, c'est une base de cet espace.**

$$\text{Ker } f = \text{vect}((0, 1, 0)) ; \dim \text{Ker } f = 1.$$

QUESTION-2

Soit donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; effectuons $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C'est une matrice triangulaire supérieure dont aucun des termes diagonaux n'est nul

: La matrice P est inversible

Pour calculer P^{-1} résolvons le système $Y = PX$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$Y = PX \iff \begin{cases} x = a \\ y - z = b \\ -x + z = c \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\iff \begin{cases} x = a \\ y - z = b \\ z = a + c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = a \\ z = a + c \\ y = b + z = a + b + c \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUESTION-3

a)

λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 0 & 0 \\ -8 & -\lambda & -8 \\ 9 & 0 & 8 - \lambda \end{pmatrix}; \text{ on effectue } L_3 \leftrightarrow L_2; \text{ on obtient}$$

$$\begin{pmatrix} -1 - \lambda & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 8 - \lambda \\ -8 & -\lambda & -8 \end{pmatrix}; \text{ on effectue } L_2 \leftarrow 8L_2 + (8 - \lambda)L_3; \text{ on obtient}$$

$$\begin{pmatrix} -1 - \lambda & 0 & 0 \\ 8(1 + \lambda) & -\lambda(8 - \lambda) & 0 \\ -8 & -\lambda & -8 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice triangulaire inférieure ; elle n'est pas inversible si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda = -1$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = 8$.

λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda \in \{-1, 0, 8\}$.

Notons $E(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ .

$$\bullet \quad (x, y, z) \in E(-1) \iff \begin{cases} 9y = 0 \\ -8x + y - 8z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = -x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(-1) &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0, z = -x\} \\ &= \{u = (x, 0, -x) / x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u = x(1, 0, -1) / x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

$E(-1) = \text{vect}((1, 0, -1))$; le vecteur $(1, 0, -1)$ est générateur de $E(-1)$, il est non nul, il en forme donc une base ; $\dim E(-1) = 1$.

• $E(0) = \text{Ker } f$, on le connaît.

$E(0) = \text{vect}((0, 1, 0))$; le vecteur $(0, 1, 0)$ en est une base : $\dim E(0) = 1$.

$$\bullet \quad (x, y, z) \in E(8) \iff \begin{cases} -9x & = 0 \\ 72x & = 0 \\ -8x - 8y - 8z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y + z & = 0 \end{cases}$$

$$E(8) = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0, y = -z\}$$

$$= \{u = (0, -z, z) \in \mathbb{R}^3 / z \in \mathbb{R}\}.$$

$$E(8) = \text{vect}((0, -1, 1)) ; \dim E(8) = 1.$$

Remarque : On peut noter que l'endomorphisme f est diagonalisable parce qu'il admet trois valeurs propres distinctes ou parce que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut celle de \mathbb{R}^3 .

b) _____

Si l'on note $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (0, 1, 0)$, $u_3 = (0, -1, 1)$, on peut affirmer d'après la remarque précédente que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de \mathbb{R}^3 ; la matrice de ces trois vecteurs dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P.$$

(on aurait pu aussi bien déduire que la famille (u_1, u_2, u_3) formait une base de \mathbb{R}^3 par le fait que la matrice de ces trois vecteurs est inversible).

D'après le cours on sait que $P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{A'}.$

$$\text{Donc } A = PA'P^{-1}.$$

QUESTION-4

a)

Si $A = M^3$, alors $AM = M^3M = M^4 = MM^3 = MA.$ $MA = AM \quad (1)$

b) _____

Notons $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 8$ et X_i la colonne propre associée à la valeur propre λ_i (on prendra pour X_i la colonne des coordonnées de u_i dans la base canonique). Dans ces conditions

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad AX_i = \lambda_i X_i.$$

Multiplions l'égalité (1) du a) par X_i à droite, il vient $MAX_i = AMX_i$; cette égalité équivaut successivement à

$M(\lambda_i X_i) = A(MX_i)$, puis $\lambda_i MX_i = A(MX_i)$. Cette dernière égalité exprime que la colonne MX_i appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_i . Or, d'après la question 3-a), ce sous-espace est de dimension 1 et a pour base X_i .

$$\exists \alpha_i \in \mathbb{R} / MX_i = \alpha_i X_i.$$

$$X_i \neq (0) \text{ et } MX_i = \alpha_i X_i \text{ veut dire que } X_i \text{ est vecteur propre de } M.$$

c) _____

Si nous notons g l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est M , le résultat précédent veut dire que le vecteur u_i est vecteur propre de g associé à la valeur propre λ_i .

La base (u_1, u_2, u_3) de \mathbb{R}^3 est constituée de vecteurs propres de g : par définition g est diagonalisable dans la base (u_1, u_2, u_3) .

Si l'on pose $M' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, on a

$$M' = P^{-1}MP \text{ soit (c'est classique) } M = PM'P^{-1}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} M^3 &= (PM'P^{-1})(PM'P^{-1})(PM'P^{-1}) \\ &= PM'(P^{-1}P)M'(P^{-1}P)M'P^{-1} \\ &= PM'IM'IM'P^{-1} \\ &= PM'^3P^{-1} \end{aligned}$$

Or $M^3 = A$, donc $A = PM'^3P^{-1}$. Or d'après la question 3-b), on a $A = PA'P^{-1}$. On en déduit

$$PA'P^{-1} = PM'^3P^{-1}.$$

Multiplications cette égalité à gauche par P^{-1} et à droite par P , on obtient

$$\begin{aligned} PA'P^{-1} = PM'^3P^{-1} &\iff P^{-1}PA'P^{-1}P = P^{-1}PM'^3P^{-1}P \\ &\iff IA'I = IM'^3I \end{aligned}$$

$$L'égalité précédente est : $A' = M'^3$.$$

d)

Explicitons matriciellement ce résultat :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} \alpha_1^3 = -1 = (-1)^3 \\ \alpha_2^3 = 0 = 0^3 \\ \alpha_3^3 = 8 = 2^3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Car l'application cube : $t \mapsto t^3$ est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

$$\text{Conclusion } M' = B' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Récapitulons : nous avons fait le raisonnement suivant : s'il existe une solution M à l'équation (*), alors il n'y en a qu'une : c'est $PB'P^{-1}$.

Regardons si cette matrice est solution de l'équation (*).

$$\begin{aligned} (PB'P^{-1})^3 &= \left(P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^3 \\ &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A. \quad (\text{d'après la question 3-a}) \end{aligned}$$

$$\text{Il y a une seule solution à l'équation (*).}$$

Explicitement cette solution est