ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

INSEEC OPTION ECONOMIQUE

ENONCE

EXERCICE–1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & -8 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et de $\operatorname{Ker} f$.

2) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

3–a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

b) En déduire l'existence d'une matrice diagonale A' telle que $A = PA'P^{-1}$.

4) Dans cette question, on s'intéresse aux solutions de l'équation matricelle : $M^3 = A$ **(*)**, où M est une matrice carrée réelle d'ordre 3.

a) Montrer que si M vérifie la relation **(*)**, alors $AM = MA$.

b) On note $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; si la matrice M vérifie la relation **(*)**, déduire de la question précédente que X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de M.

c) En déduire l'existence d'une matrice diagonale M' d'ordre 3 telle que l'on ait : $M = PM'P^{-1}$. Quelle relation a-t-on entre les matrices M' et A' ? Conclure.

EXERCICE–2

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

Un joueur dispose de deux dés ayant chacun six faces, le premier noté A est équilibré, le second noté B est tel que la probabilité d'apparition d'un numéro est proportionnelle à ce dernier, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall k \in [\![1, 6]\!],\ P(\{k\}) = \lambda \times k.$$

1–a) Montrer que $\lambda = \frac{1}{21}$.

b) Le joueur lance le dé B ; déterminer la probabilité des événements :

I : $\ll$ obtenir un chiffre impair $\gg$ et $P = \overline{I}$: $\ll$ obtenir un chiffre pair $\gg$.

2) Dans cette question le joueur dispose d'une pièce qui amène pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$ et face avec la probabilité $\frac{1}{3}$.

Soit un entier naturel $n \geq 4$; le joueur lance en premier la pièce, si elle amène pile il lancera n fois de suite le dé A, sinon il lancera n fois de suite le dé B.

a) Quelle est la probabilité de l'événement : ≪ obtenir le chiffre 1, uniquement aux trois premiers lancers ≫ ?

b) Quelle est la probabilité de l'événement : ≪ obtenir au cours des n lancers, trois fois seulement le chiffre 1 ≫ ?

c) Soit k un entier fixé tel que $2k \leq n$.

i) On considère l'événement E : ≪ les $(2k)$ premiers lancers amènent alternativement les chiffres 1 et 6 dans cet ordre ≫ (le premier lancer amène le chiffre 1, le deuxième le chiffre 6, etc...). Calculer $P(E)$.

ii) On sait que l'événement E est réalisé, quelle est la probabilité que le lancer de la pièce ait donné pile ?

3) Dans cette question le joueur lance toujours le dé B et on s'intéresse à l'apparition pour la première fois de la séquence IP (on obtient pour cette séquence à un lancer un chiffre impair et au lancer suivant un chiffre pair).

On notera : I_k ≪ le chiffre obtenu au k ème lancer est impair ≫ et P_k ≪ le chiffre obtenu au k ème lancer est pair ≫.

On définit la variable aléatoire X égale au numéro du lancer amenant le chiffre pair lors de l'apparition pour la première fois de la séquence IP. Si par exemple au cours des lancers on obtient $P_1 \cap P_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap P_5$, alors $X = 5$.

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable X ?

b) Déterminer $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = 4)$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; exprimer l'événement $(X = n)$ à l'aide d'événements du type P_i et I_j et montrer que :

$$\forall n \geq 2,\ P(X = n) = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{4}{7}\right)^{k+1} \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1-k}$$

d) En déduire que : $\forall n \geq 2,\ P(X = n) = 4\left(\frac{3}{7}\right)^{n}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} - 1\right]$

e) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) = 1$.

f) Calculer $E(X)$.

EXERCICE–3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{\ln x}{x-1} & \text{si } x \in]0,1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal.

Partie I : étude de f

1) Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

2–a) Déterminer le développement limité de f en 1 à l'ordre 2. En déduire la dérivabilité de f en 1 et préciser $f'(1)$.

2–b) Etudier localement la position de C par rapport à sa tangente Δ au point d'abscisse 1.

3–a) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, calculer $f'(x)$.

b) Etudier sur $]0, +\infty[$ les variations de $\varphi\ :\ x \longmapsto x - 1 - x \ln x$ et en déduire le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de f et construire dans un même repère C et Δ (on donne $\ln 2 \simeq 0.7$ et $\ln 3 \simeq 1.1$).

Partie II : étude d'une série

Soit n un entier naturel non nul ; on considère la fonction

$$f_n \ : \ [0,1[\to \mathbb{R}, \ x \longmapsto \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

1–a) Soit $x \in [0,1[$, montrer que : $0 \leq \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{x^n}{1-t} dt$; en déduire :

$$\forall x \in [0,1[, \ \ 0 \leq f_n(x) \leq x^n \ln(\frac{1}{1-x}) \text{ et } \forall x \in [0, \frac{1}{2}], \ \ 0 \leq f_n(x) \leq x^n \ln 2$$

b) En déduire l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f_n(x)}{x} dx$.

c) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f_n(x)}{x} dx \leq \frac{\ln 2}{n.2^n}$$

2) Par dérivation de

$g \ : \ [0,1[\to \mathbb{R}, \ x \longmapsto \ln(1-x)$ et de $S_n \ : \ [0,1[\to \mathbb{R}, \ x \longmapsto -(x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n}) - f_n(x)$

montrer que $\forall x \in [0,1[, \ S_n(x) = g(x)$.

3) Justifier l'égalité : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 2^k} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f_n(x)}{x} dx.$

5–a) En raisonnant par majoration, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 2^k}$ converge.

5–b) A l'aide des questions précédentes montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{x-1} dx.$

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

INSEEC

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

- On sait que $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Dans le cas présent, cela donne $\operatorname{Im} f = \operatorname{vect}((-1,-8,9),(0,-8,8))$ car $f(e_2) = (0,0,0)$ d'après la deuxième colonne de A.

La famille $((-1,-8,9),(0,-8,8))$ est génératrice de $\operatorname{Im} f$; elle est libre car les triplets ne sont pas proportionnels.

$$\boxed{\text{La famille } ((-1,-8,9),(0,-8,8)) \text{ est une base de } \operatorname{Im} f \text{ ; } \dim \operatorname{Im} f = 2.}$$

- **Appliquons le théorème du rang** :

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3.$$

On en déduit $\dim \operatorname{Ker} f = 3 - 2 = 1$. Or on sait que e_2 appartient à $\operatorname{Ker} f$ puisque $f(e_2) = (0,0,0)$. **Le vecteur e_2 est un vecteur non nul d'un espace de dimension 1, c'est une base de cet espace.**

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}((0,1,0)) \text{ ; } \dim \operatorname{Ker} f = 1.}$$

QUESTION–2

Soit donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; effectuons $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
C'est une matrice triangulaire supérieure dont aucun des termes diagonaux n'est nul : $\boxed{\text{La matrice } P \text{ est inversible}}$

Pour calculer P^{-1} résolvons le système $Y = PX$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$Y = PX \iff \begin{cases} x & = a \\ y - z & = b \\ -x + z & = c \end{cases} \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$$

$$\iff \begin{cases} x & = a \\ y - z & = b \\ z & = a + c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = a \\ z & = a + c \\ y & = b + z = a + b + c \end{cases}$$

Ce système s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUESTION–3

a)

λ est valeur propre de A si et seulement si la matrice $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -8 & -\lambda & -8 \\ 9 & 0 & 8-\lambda \end{pmatrix}$; on effectue $L_3 \longleftrightarrow L_2$; on obtient

$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 8-\lambda \\ -8 & -\lambda & -8 \end{pmatrix}$; on effectue $L_2 \longleftarrow 8L_2 + (8-\lambda)L_3$; on obtient

$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 8(1+\lambda) & -\lambda(8-\lambda) & 0 \\ -8 & -\lambda & -8 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice triangulaire inférieure ; elle n'est pas inversible si et seulement si l'un des termes diagonaux est nul, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda = -1$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = 8$.

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } A \text{ si et seulement si } \lambda \in \{-1, 0, 8\}.}$$

Notons $E(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

- $(x, y, z) \in E(-1) \iff \begin{cases} 9y & = 0 \\ -8x + y - 8z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = 0 \\ z & = -x \end{cases}$

$$\begin{aligned} E(-1) &= \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ y = 0, \ z = -x\} \\ &= \{u = (x, 0, -x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{u = x(1, 0, -1) \ / \ x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(-1) = \mathrm{vect}((1,0,-1)) \text{ ; le vecteur } (1,0,-1) \text{ est générateur} \\ \text{de } E(-1), \text{ il est non nul, il en forme donc une base ;} \\ \dim E(-1) = 1. \end{array}}$$

- $E(0) = \mathrm{Ker}\, f$, on le connaît.

$$\boxed{E(0) = \mathrm{vect}((0,1,0)) \text{ ; le vecteur } (0,1,0) \text{ en est une base : } \dim E(0) = 1.}$$

- $(x,y,z) \in E(8) \iff \begin{cases} -9x & = 0 \\ 72x & = 0 \\ -8x-8y-8z & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x & = 0 \\ y+z & = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} E(8) &= \{u=(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x=0, \ y=-z\} \\ &= \{u=(0,-z,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

$$\boxed{E(8) = \text{vect}((0,-1,1)) \ ; \ \dim E(8) = 1.}$$

Remarque **: On peut noter que l'endomorphisme f est diagonalisable parce qu'il admet trois valeurs propres distinctes ou parce que la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut celle de $\mathbb{R}^3$.**

b)

Si l'on note $u_1 = (1,0,-1)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (0,-1,1)$, on peut affirmer d'après la remarque précédente que la famille (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$; la matrice de ces trois vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P.$$

(on aurait pu aussi bien déduire que la famille (u_1,u_2,u_3) formait une base de $\mathbb{R}^3$ par le fait que la matrice de ces trois vecteurs est inversible).

D'après le cours on sait que $P^{-1}AP = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}}_{A'}$.

$$\boxed{\text{Donc } A = PA'P^{-1}.}$$

QUESTION–4

a)

Si $A = M^3$, alors $AM = M^3M = M^4 = MM^3 = MA$. $\boxed{MA = AM \qquad \textbf{(1)}}$

b)

Notons $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 8$ et X_i la colonne propre associée à la valeur propre λ_i (on prendra pour X_i la colonne des coordonnées de u_i dans la base canonique). Dans ces conditions

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \ AX_i = \lambda_i X_i.$$

Multiplions l'égalité **(1)** du a) par X_i à droite, il vient $MAX_i = AMX_i$; cette égalité équivaut successivement à

$M(\lambda_i X_i) = A(MX_i)$, puis $\lambda_i MX_i = A(MX_i)$. Cette dernière égalité exprime que la colonne MX_i appartient au sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_i. Or, d'après la question 3–a), ce sous-espace est de dimension 1 et a pour base X_i.

$$\exists \alpha_i \in \mathbb{R} \ / \ MX_i = \alpha_i X_i.$$

$$\boxed{X_i \neq (0) \text{ et } MX_i = \alpha_i X_i \text{ veut dire que } X_i \text{ est vecteur propre de } M.}$$

c)

Si nous notons g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M, le résultat précédent veut dire que le vecteur u_i est vecteur propre de g associé à la valeur propre λ_i.

La base (u_1, u_2, u_3) de $\mathbb{R}^3$ est constituée de vecteurs propres de g : par définition g est diagonalisable dans la base (u_1, u_2, u_3).

Si l'on pose $M' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, on a

$$\boxed{M' = P^{-1}MP \text{ soit (c'est classique) } M = PM'P^{-1}.}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} M^3 &= (PM'P^{-1})(PM'P^{-1})(PM'P^{-1}) \\ &= PM'(P^{-1}P)M'(P^{-1}P)M'P^{-1} \\ &= PM'IM'IM'P^{-1} \\ &= PM'^3P^{-1} \end{aligned}$$

Or $M^3 = A$, donc $A = PM'^3P^{-1}$. Or d'après la question 3–b), on a $A = PA'P^{-1}$. On en déduit

$$PA'P^{-1} = PM'^3P^{-1}.$$

Multiplions cette égalité à gauche par P^{-1} et à droite par P, on obtient

$$\begin{aligned} PA'P^{-1} = PM'^3P^{-1} &\iff P^{-1}PA'P^{-1}P = P^{-1}PM'^3P^{-1}P \\ &\iff IA'I = IM'^3I \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'égalité précédente est : } A' = M'^3.}$$

d)

Explicitons matriciellement ce résultat :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^3 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha_1^3 &= -1 = (-1)^3 \\ \alpha_2^3 &= \ \ 0 = \ \ 0^3 \\ \alpha_3^3 &= \ \ 8 = \ \ 2^3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha_1 &= -1 \\ \alpha_2 &= \ \ 0 \\ \alpha_3 &= \ \ 2 \end{cases}$$

Car l'application cube : $t \longmapsto t^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\text{Conclusion } M' = B' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Récapitulons : nous avons fait le raisonnement suivant : **s'il existe** une solution M à l'équation **(*)**, alors il n'y en a **qu'une** : c'est $PB'P^{-1}$.

Regardons si cette matrice est solution de l'équation **(*)**.

$$\begin{aligned} \left(PB'P^{-1}\right)^3 &= (P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1})^3 \\ &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A. \quad \text{(d'après la question 3–a)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Il y a une seule solution à l'équation (*).}}$$

Explicitement cette solution est