European Entrepreneurial Learning

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2001

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 14 mai 2001 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

1. Montrer que A n'est pas inversible. En déduire que 0 est valeur propre de A.

2.a. Calculer A^2, A^3, A^4.

b. Établir que 0 est la seule valeur propre de f.

c. Déterminer la dimension du noyau de f.

d. Est-ce que f est diagonalisable ?

3. On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$, $\varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

a. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

b. Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

LES ANNALES

EXERCICE 2

On considère l'application $f : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in [0;+\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si} \quad x > 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

1 . a. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;+\infty[$. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$.

c. Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

d. En déduire que f est de classe C^1 sur $[0;+\infty[$.

e. Déterminer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$.

2 . a. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2).$$

b. Étudier les variations de la fonction $g : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in [0;+\infty[$, par :
$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$.

En déduire : $\forall x \in]0;+\infty[, \quad f''(x) > 0$.

c. En déduire le sens de variation de f. On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f.

d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

3. On considère la suite $(u_n)_{n \in N}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

a. Montrer :

$$\forall x \in [0;+\infty[, \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

b. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$.

c. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|.$$

d. Établir que la suite $(u_n)_{n \in N}$ converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 3

1. Pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}\, t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0 \, . \end{cases}$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 f_n(t) = 0$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

b. Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in [0; +\infty[, \ \displaystyle\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^{-x} x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$

c. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

d. Montrer que, pour tout entier naturel n, la fonction f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

2. Pour tout entier naturel n, on définit une variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'espérance $\mathrm{E}(X_n)$ et la variance $\mathrm{V}(X_n)$ vérifient :

$$\mathrm{E}(X_n) = n + 1, \qquad \mathrm{V}(X_n) = n + 1.$$

b. Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} suivantes :

$$\int_0^4 f_4(t)\,\mathrm{d}t \approx 0,37 \qquad \int_0^6 f_4(t)\,\mathrm{d}t \approx 0,71 \qquad \int_0^8 f_4(t)\,\mathrm{d}t \approx 0,90.$$

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de X_4.
Déterminer une valeur décimale approchée de la probabilité $\mathrm{P}(X_4 > 4)$ et une valeur décimale approchée de la probabilité $\mathrm{P}(4 < X_4 \leqslant 8)$.

3. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t.
On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t.

a. Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y_t.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle Z_n, prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$, égale à l'instant d'arrivée de la $n^{\text{ième}}$ voiture au péage à partir de l'instant 0.

b. Soient $t \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Justifier l'égalité de l'évènement $(Z_n \leqslant t)$ et de l'évènement $(Y_t \geqslant n)$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle Z_n.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

LYON MATH III

CORRIGE

EXERCICE I

QUESTION–1

Les deux premières lignes de la matrice A sont égales : A n'est pas inversible. On sait - c'est un résultat du cours que -

λ valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible, donc 0 **est valeur propre de A si et seulement si $A - 0I = A$ n'est pas inversible.**

Remarque : On peut aussi - mais cela peut laisser penser que l'on ne connait pas très bien son cours - effectuer $L_1 \longleftarrow L_2,\ L_3 \longleftarrow L_4,\ L_4 \longleftarrow L_1$, on obtient la matrice équivalente $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ puis on effectue $L_4 \longleftarrow L_4 - L_1$ et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure et l'un des termes diagonaux est nul : la matrice n'est pas inversible.

QUESTION–2

a)

Il suffit de faire le calcul, on trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad A^4 = (0).$$

b)

Soit λ une valeur propre de A ; il existe donc une colonne $X \neq (0)$ telle que $A = \lambda X$

$A^2X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X$;

$A^3X = A^2(AX) = A^2(\lambda X) = \lambda A^2 X = \lambda^3 X$. De mme

$$A^4X = \lambda^4 X \qquad \textbf{(1)}$$

Or $A^4 = (0)$, donc $A^4X = (0)$. L'égalité **(1)** devient $\lambda^4 X = (0)$. Or $X \neq (0) \Longrightarrow \lambda^4 = 0$, soit $\lambda = 0$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Conclusion : } \lambda \text{ valeur propre de } A \Longrightarrow \lambda = 0. \\ 0 \text{ est donc la seule valeur propre possible de } A.\end{array}}$$

Remarque : $A^4 = (0)$ indique que le polynôme $P = X^4$ est un polynôme annulateur de A et l'on sait que les valeurs possibles de A sont **nécessairement** racines de P : la seule valeur porpre possible de A est donc $\lambda = 0$

c)

$$u = (x, y, z, t) \in \operatorname{Ker} f \Longleftrightarrow AX = (0) \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Cette équation équivaut au système : $\begin{cases} x - t &= 0 \\ x - t &= 0 \\ y - t &= 0 \\ z - t &= 0 \end{cases}$

Donc $x = y = z = t$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f &= \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x = y = z = t\} \\ &= \{u = (x, x, x, x) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4 \ / \ x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est générateur de $\operatorname{Ker} f$, il est non nul ; il en forme donc une base.

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{vect}\big((1, 1, 1, 1)\big) \ : \ \dim \operatorname{Ker} f = 1.}$$

d)

On sait que $\operatorname{Ker} f = E_0(f)$ (sous-espace propre associé à la valeur zéro).

$$\boxed{\dim E_0(f) = 1 < 4 = \dim \mathbb{R}^4, \text{ donc } f \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

QUESTION–3

a)

$\varepsilon_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 1, 0)$, $\varepsilon_4 = (1, 1, 1, 1)$. Il suffit de faire le calcul puisque $\varepsilon_{i+1} = f(\varepsilon_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

Soit P la matrice des quatre vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On sait que **la famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si la matrice P est inversible.**

$$\text{Or } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure dont **aucun** des termes diagonaux n'est nul : P est inversible.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4 .}$$

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$