



Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTRÉE 2001

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 14 mai 2001 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de \mathbb{R}^4 dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de \mathbb{R}^4 est A .

1. Montrer que A n'est pas inversible. En déduire que 0 est valeur propre de A .
2. a. Calculer A^2 , A^3 , A^4 .
b. Établir que 0 est la seule valeur propre de f .
c. Déterminer la dimension du noyau de f .
d. Est-ce que f est diagonalisable ?
3. On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$, $\varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.
a. Montrer que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^4 .
b. Déterminer la matrice N de f relativement à la base \mathcal{C} de \mathbb{R}^4 .
4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

EXERCICE 2

On considère l'application $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in [0; +\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.
- b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.
- c. Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.
- d. En déduire que f est de classe C^1 sur $[0; +\infty[$.
- e. Déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

2. a. Montrer que f est de classe C^2 sur $]0; +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (xe^x - 2e^x + x + 2).$$

- b. Étudier les variations de la fonction $g :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in]0; +\infty[$, par :

$$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2.$$

En déduire : $\forall x \in]0; +\infty[, \quad f''(x) > 0$.

- c. En déduire le sens de variation de f . On précisera la limite de f en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f .
 - d. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
 - a. Montrer :

$$\forall x \in [0; +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

- b. Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in]0; +\infty[$.
- c. Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|.$$

- d. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 3

1. Pour tout entier naturel n , on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = \begin{cases} \frac{e^{-t} t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_n(t) = 0$.

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ est convergente.

b. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0; +\infty[, \int_0^x f_n(t) dt = -\frac{e^{-x} x^n}{n!} + \int_0^x f_{n-1}(t) dt$.

c. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1$.

d. Montrer que, pour tout entier naturel n , la fonction f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire.

2. Pour tout entier naturel n , on définit une variable aléatoire X_n admettant f_n pour densité de probabilité.

a. Montrer que, pour tout entier naturel n , l'espérance $E(X_n)$ et la variance $V(X_n)$ vérifient :

$$E(X_n) = n + 1, \quad V(X_n) = n + 1.$$

b. Dans cette question, on suppose que $n = 4$. On donne les valeurs approchées à 10^{-2} suivantes :

$$\int_0^4 f_4(t) dt \approx 0,37 \quad \int_0^6 f_4(t) dt \approx 0,71 \quad \int_0^8 f_4(t) dt \approx 0,90.$$

Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction de répartition de X_4 .

Déterminer une valeur décimale approchée de la probabilité $P(X_4 > 4)$ et une valeur décimale approchée de la probabilité $P(4 < X_4 \leq 8)$.

3. Pour tout réel $t > 0$, on définit la variable aléatoire Y_t égale au nombre de voitures arrivant à un péage d'autoroute de l'instant 0 à l'instant t .

On suppose que la variable aléatoire Y_t suit une loi de Poisson de paramètre t .

a. Rappeler, pour tout réel $t > 0$, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y_t .

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la variable aléatoire réelle Z_n , prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^+ , égale à l'instant d'arrivée de la $n^{\text{ième}}$ voiture au péage à partir de l'instant 0.

b. Soient $t \in]0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Justifier l'égalité de l'évènement $(Z_n \leq t)$ et de l'évènement $(Y_t \geq n)$.

c. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la fonction de répartition de la variable aléatoire réelle Z_n .

d. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire Z_n admet f_{n-1} comme densité de probabilité.



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

LYON MATH III

CORRIGE

EXERCICE I

QUESTION-1

Les deux premières lignes de la matrice A sont égales : A n'est pas inversible. On sait - c'est un résultat du cours que -

λ valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible, donc 0 est valeur propre de A si et seulement si $A - 0I = A$ n'est pas inversible.

Remarque : On peut aussi - mais cela peut laisser penser que l'on ne connaît pas très bien son cours - effectuer $L_1 \leftarrow L_2$, $L_3 \leftarrow L_4$, $L_4 \leftarrow L_1$, on obtient la matrice

équivalente $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ puis on effectue $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ et on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure et l'un des termes diagonaux est nul : la matrice n'est pas inversible.

QUESTION-2

a)

Il suffit de faire le calcul, on trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} ; \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad A^4 = (0).$$

b)

Soit λ une valeur propre de A ; il existe donc une colonne $X \neq (0)$ telle que $A = \lambda X$

$$A^2 X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda^2 X ;$$

$$A^3 X = A^2(AX) = A^2(\lambda X) = \lambda A^2 X = \lambda^3 X. \text{ De mme}$$

$$A^4 X = \lambda^4 X \tag{1}$$

Or $A^4 = (0)$, donc $A^4 X = (0)$. L'égalité (1) devient $\lambda^4 X = (0)$. Or $X \neq (0) \implies \lambda^4 = 0$, soit $\lambda = 0$.

Conclusion : λ valeur propre de $A \implies \lambda = 0$.
 0 est donc la seule valeur propre possible de A .

Remarque : $A^4 = (0)$ indique que le polynôme $P = X^4$ est un polynôme annulateur de A et l'on sait que les valeurs possibles de A sont **nécessairement** racines de P : la seule valeur propre possible de A est donc $\lambda = 0$

c)

$$u = (x, y, z, t) \in \text{Ker } f \iff AX = (0) \text{ où } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

$$\text{Cette équation équivaut au système : } \begin{cases} x - t = 0 \\ x - t = 0 \\ y - t = 0 \\ z - t = 0 \end{cases}$$

Donc $x = y = z = t$.

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x = y = z = t\} \\ &= \{u = (x, x, x, x) \in \mathbb{R}^4 / x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4 / x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Le vecteur $(1, 1, 1, 1)$ est générateur de $\text{Ker } f$, il est non nul ; il en forme donc une base.

$$\text{Ker } f = \text{vect} \left((1, 1, 1, 1) \right) : \dim \text{Ker } f = 1.$$

d)

On sait que $\text{Ker } f = E_0(f)$ (sous-espace propre associé à la valeur zéro).

$$\dim E_0(f) = 1 < 4 = \dim \mathbb{R}^4, \text{ donc } f \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

QUESTION-3

a)

$\varepsilon_2 = (1, 1, 0, 0)$, $\varepsilon_3 = (1, 1, 1, 0)$, $\varepsilon_4 = (1, 1, 1, 1)$. Il suffit de faire le calcul puisque $\varepsilon_{i+1} = f(\varepsilon_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.

Soit P la matrice des quatre vecteurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ dans la base canonique de \mathbb{R}^4 . On sait que **la famille $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est une base de \mathbb{R}^4 si et seulement si la matrice P est inversible.**

$$\text{Or } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice triangulaire supérieure dont **aucun** des termes diagonaux n'est nul : P est inversible.

$$\text{La famille } \mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.$$

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$