



ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Mercredi 9 Mai 2001, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On dispose de n jetons numérotés de 1 à n . On tire, au hasard et sans remise, les jetons un à un. La suite (a_1, a_2, \dots, a_n) des numéros tirés est aussi appelée permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Étant donné deux entiers k et p vérifiant $1 \leq k \leq p \leq n$, la suite (a_k, \dots, a_p) — se réduisant à (a_k) dans le cas où k est égal à p — est appelée sous-suite de (a_1, a_2, \dots, a_n) et son nombre d'éléments est appelé longueur de cette sous-suite.

On admettra que cette expérience aléatoire peut être modélisée par la donnée de l'univers Ω , ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$, muni de la tribu de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme P , ce qui signifie que, pour toute permutation ω de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $P(\{\omega\}) = \frac{1}{n!}$.

Si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, on note $E(X)$ son espérance et $V(X)$ sa variance.

Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, on note $Cov(X, Y)$ leur covariance.

Préliminaire

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{1, 2, \dots, m\}$ où m est un entier supérieur ou égal à 2.

Montrer l'égalité : $E(X) = \sum_{k=1}^m P([X \geq k])$.

Partie 1 : Première sous-suite croissante

Étant donné une permutation (a_1, a_2, \dots, a_n) de $\{1, 2, \dots, n\}$, la première sous-suite croissante est définie de la façon suivante : dans le cas $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, la première sous-suite croissante est (a_1, a_2, \dots, a_n) ; dans le cas contraire, k étant le plus petit entier de $\{1, \dots, n-1\}$ vérifiant $a_k > a_{k+1}$, la première sous-suite croissante est (a_1, \dots, a_k) .

Soit L la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qui, à toute permutation ω , associe la longueur de sa première sous-suite croissante.

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme $2 < 3 < 5$ et $5 > 4$, on a : $L(\omega) = 3$.

- 1) a) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L ? Que vaut $P(\{L = n\})$?
b) Montrer que, pour tout entier k de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $P(\{L \geq k\}) = \frac{1}{k!}$. En déduire la loi de L .
- 2) Donner la valeur de $E(L)$ sous forme d'une somme et déterminer la limite de $E(L)$ quand n tend vers l'infini.

Partie 2 : Deuxième sous-suite croissante

Étant donné une permutation (a_1, a_2, \dots, a_n) de $\{1, 2, \dots, n\}$ et sa première sous-suite croissante (a_1, \dots, a_k) ; si celle-ci se termine par a_n (i.e. si $k = n$), on dit que la deuxième sous-suite croissante n'existe pas; dans le cas contraire, la première sous-suite croissante de (a_{k+1}, \dots, a_n) est appelée deuxième sous-suite croissante de (a_1, a_2, \dots, a_n) .

Soit L' la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω , associe 0 s'il n'existe pas de deuxième sous-suite croissante, et la longueur de la deuxième sous-suite croissante, dans le cas contraire.

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, la deuxième sous-suite croissante est $(4, 9)$ et l'on a : $L'(\omega) = 2$.

- 1) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L' ? Que vaut $\mathbf{P}([L' = 0])$?
- 2) On suppose, dans cette question seulement, que n est égal à 3.
 - a) Montrer que la loi du couple (L, L') est donnée par le tableau suivant :

	L			
L'		1	2	3
0		0	0	1/6
1		1/6	1/3	0
2		1/3	0	0

- b) Donner la loi de L' et calculer son espérance.
 - c) Calculer la covariance de L et de L' . Pouvait-on prévoir le signe de cette covariance?
- 3) On suppose à nouveau que n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.
 - a) Dénombrer les parties de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ distinctes de $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 2, \dots, n-1\}$.
 - b) En déduire $\mathbf{P}([L + L' = n])$.
 - c) Montrer de même que, pour tout entier k de $\{1, 2, \dots, n\}$, on a : $\mathbf{P}([L + L' \geq k]) = \frac{2^k - k}{k!}$.
 - d) Donner la valeur de $E(L + L')$ sous forme d'une somme.
 - e) En déduire $E(L')$ et sa limite quand n tend vers l'infini.

Partie 3 : Nombre de sous-suites croissantes

Étant donné une permutation (a_1, a_2, \dots, a_n) de $\{1, 2, \dots, n\}$, si sa deuxième sous-suite croissante existe et ne se termine pas par a_n , on définit la troisième sous-suite croissante à l'instar de la deuxième, etc., jusqu'à ce que l'on ait défini une sous-suite croissante se terminant par a_n .

Soit T la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui, à toute permutation ω , associe le nombre de ses sous-suites croissantes.

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, comme les sous-suites croissantes sont $(2, 3, 5), (4, 9), (6, 7, 8)$ et (1) , on a : $T(\omega) = 4$.

- 1)
 - a) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 2. Calculer son espérance et sa variance.
 - b) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 3. Calculer son espérance et sa variance.
- 2) On suppose désormais l'entier n supérieur ou égal à 4.
 - a) Calculer $\mathbf{P}([T = 1])$ et $\mathbf{P}([T = n])$.
 - b) Comparer les événements $[L + L' = n]$ et $[T \leq 2]$. En déduire la valeur de $\mathbf{P}([T = 2])$.
 - c) Donner la loi de T dans le cas où n vaut 4. Calculer son espérance et sa variance.
- 3) Pour tout entier i de $\{1, 2, \dots, n-1\}$, soit A_i l'événement égal à l'ensemble des permutations (a_1, a_2, \dots, a_n) vérifiant $a_i > a_{i+1}$, et soit X_i la variable aléatoire qui, à toute permutation ω , associe 1 si $\omega \in A_i$ et 0 sinon.
 - a) Montrer que X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Donner son espérance et sa variance.
 - b) Donner une expression de T en fonction de X_i . En déduire l'égalité : $E(T) = \frac{n+1}{2}$.
 - c) Montrer que l'on a : $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}, \mathbf{P}(A_i \cap A_{i+1}) = \frac{1}{6}$. En déduire la valeur de $\text{Cov}(X_i, X_{i+1})$.
 - d) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'entiers vérifiant $1 \leq i < i+2 \leq j \leq n-1$, les événements A_i et A_j sont indépendants.
En déduire l'égalité : $\text{Cov}(X_i, X_j) = 0$.



e) Établir enfin l'égalité : $V(T) = \frac{n+1}{12}$.

- 4) On suppose maintenant que n est égal à 5. On considère 1000 variables aléatoires T_1, \dots, T_{1000} , mutuellement indépendantes, de même loi que la variable T et on note S la variable aléatoire égale à $\frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} T_i$.

On note ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on donne la valeur approchée suivante : $\phi(\sqrt{5}) \simeq 0,987$.

Calculer une valeur approchée de la probabilité $P(\{2,95 < S < 3,05\})$.

Partie 4 : Simulation informatique

Dans le langage informatique PASCAL, la fonction **random** renvoie, pour un argument m de type **integer** vérifiant $m \geq 1$, un nombre entier aléatoire compris entre 0 et $m - 1$ (cette fonction est initialisée au début du corps principal du programme par la procédure **randomize**).

On rappelle que, dans l'exécution d'une boucle **for i :=n downto 2**, i prend successivement les valeurs $n, n-1, \dots, 2$.

Dans un programme écrit en PASCAL, figurent la déclaration **type tableau = array [1..5] of integer**; et la procédure :

```
procedure aleatoire(var A :tableau);
var aux,i,alea : integer;
begin
  for i :=1 to 5 do A[i] :=i;
  for i :=5 downto 2 do begin
    alea := random(i)+1;
    aux :=A[alea];
    A[alea] :=A[i];
    A[i] :=aux;
  end
end;
```

- 1) a) On suppose que les valeurs successives de **alea** sont 4, 2, 3 et 2. Donner les valeurs de **A[1]**, **A[2]**, **A[3]**, **A[4]** et **A[5]** à la fin de l'exécution de la procédure.
b) Quelles valeurs successives doit prendre **alea** pour obtenir, à la fin de l'exécution de la procédure le tableau : **A[1]=3**, **A[2]=5**, **A[3]=2**, **A[4]=4**, **A[5]=1**?
c) Expliquer pourquoi la procédure ci-dessus permet de simuler l'expérience aléatoire définie au début du problème.
- 2) Écrire une fonction d'en-tête **function T(A :tableau) :integer**; qui renvoie le nombre de sous-suites croissantes du tableau **A** correspondant à une permutation de $\{1, \dots, 5\}$.
- 3) On suppose que le programme contient les déclarations **var A :tableau; var k :integer; var S :real**; et que le corps principal du programme est le suivant :

```
begin
  randomize;
  S :=0;
  for k :=1 to 1000 do begin
    aleatoire(A);
    S :=S+T(A);
  end;
  S :=S/1000;
  writeln(S);
end.
```

Après exécution du programme la valeur affichée de **S** est 2,98. Ce résultat est-il étonnant ?



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

HEC, EM.LYON, ESCP-EAP

CORRIGE

HLP II

PRELIMINAIRES.

Rappelons que $\forall k \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $(X \geq k) = (X = k) \cup (X \geq k+1)$, les deux derniers événements étant disjoints.

$P(X \geq k) = P(X = k) + P(X \geq k+1)$, donc

$$P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1).$$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^m kP(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^m k(P(X \geq k) - P(X \geq k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^m kP(X \geq k) - \sum_{k=1}^m kP(X \geq k+1) \end{aligned}$$

Posons $i = k+1$ dans la seconde somme, donc $k = i-1$.

$$E(X) = \sum_{k=1}^m kP(X \geq k) - \sum_{i=2}^{m+1} (i-1)P(X \geq i)$$

Notons que $P(X \geq m+1) = 0$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^m kP(X \geq k) - \sum_{i=2}^m (i-1)P(X \geq i) \\ &= \sum_{k=1}^m kP(X \geq k) - \sum_{\underline{k=2}}^m (k-1)P(X \geq k) \\ &\quad (\text{car l'indice } i \text{ est en fait muet}) \\ &= \sum_{k=1}^m kP(X \geq k) - \sum_{k=2}^m kP(X \geq k) + \sum_{k=2}^m P(X \geq k) \\ &= P(X \geq 1) + \sum_{k=2}^m P(X \geq k) \end{aligned}$$

Finalement, $E(X) = \sum_{k=1}^m P(X \geq k)$.

PARTIE-I

QUESTION-1

a)

• Si $a_1 > a_2$, la première sous-suite croissante est (a_1) et $L = 1$. C'est la valeur minimale prise par L .

Si $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, la première sous-suite croissante est (a_1, a_2, \dots, a_n) et $L = n$. C'est la valeur maximale de L car L ne peut pas dépasser le nombre d'entiers que l'on range.

• Remarquons qu'il n'y a qu'une façon de ranger les entiers de 1 à n dans l'ordre strictement croissant, c'est lorsque $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, a_i = i$.

$$P(L = n) = \frac{1}{n!}.$$

b)

Pour construire une suite qui réalise l'événement $L \geq k$ ($1 \leq k \leq n$), on peut opérer ainsi :

i) On choisit k entiers dans l'intervalle $\llbracket 1; n \rrbracket$,

ii) on les range dans l'ordre strictement croissant ; on forme ainsi les k premiers termes de la suite.

iii) On range de toutes les manières possibles les $n - k$ nombres qu'il reste et qui vont compléter la suite.

Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k premiers termes i), il y a une seule façon de les ranger dans l'ordre strictement croissant ii) et il y a $(n - k)!$ façons de ranger les derniers termes iii).

Il y a $\binom{n}{k} \times (n - k)! = \frac{n!}{k!(n - k)!} \times (n - k)! = \frac{n!}{k!}$ listes dans l'événement ($L \geq k$).

Remarque 1 : A partir du moment où i) et ii) sont réalisés, on est sûr de réaliser $L \geq k$.

Remarque 2 : On aurait pu regrouper les deux premiers points en disant qu'il y a $\binom{n}{k}$ suites strictement croissantes de k nombres pris entre 1 et n (c'est un résultat du cours).

Pour avoir la probabilité de cet événement il faut diviser par $n!$, donc

$$\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(L \geq k) = \frac{1}{k!}.$$

On sait que $P(L = k) = P(L \geq k) - P(L \geq k + 1)$ (cf calcul des préliminaires)

Si $k = n$, on sait déjà que $P(L = n) = \frac{1}{n!}$; résultat en conformité avec l'égalité précédente car $P(L \geq n + 1) = 0$. En résumé :

$$P(L = n) = \frac{1}{n!} ; P(L = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k + 1)!} \text{ si } 1 \leq k \leq n - 1.$$

QUESTION-2

D'après la partie préliminaire, $E(L) = \sum_{k=1}^n P(L \geq k)$, donc

$$E(L) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}.$$

On sait que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$. Donc $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(L) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 1.$$

PARTIE – II

QUESTION – 1

S'il n'y a pas de deuxième sous-suite croissante, alors $L' = 0$. C'est la valeur minimale prise par L' .

Les valeurs prises par L' sont des entiers de $\llbracket 0; n \rrbracket$ car L' ne peut pas être supérieure au nombre total d'entiers rangés.

Cependant L' ne peut valoir n , car cela signifierait que tous les entiers de 1 à n sont rangés dans la seconde suite. Il n'y aurait pas de première suite strictement croissante, ce qui est impossible.

Donc $L'(\Omega) \subset \llbracket 0; n - 1 \rrbracket$.

Considérons la suite $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n) = (n, 2, 3, \dots, n - 2, n - 1)$. On a alors $L = 1$ et $L' = n - 1$. **La valeur maximale prise par L' est $n - 1$.**

Comme on l'a dit plus haut, l'événement $(L = n)$ est aussi l'événement $(L' = 0)$. Donc

$$P(L' = 0) = \frac{1}{n!}.$$

QUESTION – 2

a)

D'après l'étude générale précédente, la seule suite réalisant $(L' = 0)$ est $(1, 2, 3)$. Donc $P(L' = 0, L = 3) = \frac{1}{6}$; et $(L' = 0, L = 1)$ ainsi que $(L' = 0, L = 2)$ sont des événements impossibles. Ce qui justifie la première ligne.

Il reste alors $3! - 1 = 5$ listes à considérer :

Les listes $(1, 3, 2)$ et $(2, 3, 1)$ pour lesquelles $(L' = 1, L = 2)$.

Les listes $(3, 1, 2)$ et $(2, 1, 3)$ pour lesquelles $(L' = 2, L = 1)$.

La liste $(3, 2, 1)$ pour laquelle $(L' = 1, L = 1)$.

On retrouve bien $P(L' = 1, L = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(L' = 1, L = 1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $P(L' = 1, L = 3) = \frac{1}{6}$; les autres étant nulles.

b)

La loi de L' s'obtient comme **loi marginale** en utilisant le résultat général :

$$P(L' = k) = \sum_{i=1}^3 P(L' = k, L = i).$$