www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mardi 8 Mai 2001, de 8h. à 12h.

LES ANNALES

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

On note m un paramètre réel et on considère les matrices H_m définies par

$$H_m = \begin{pmatrix} -1-m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3-m \end{pmatrix}$$

On note h_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par H_m dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. a) On suppose dans cette question que $m = 2$. Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2 et les sous-espaces propres associés.

   b) La matrice H_2 est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.

2. Etudier de même les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice H_0. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

3. a) Montrer qu'il existe un réel a, qu'on déterminera, qui est une valeur propre de la matrice H_m pour toutes les valeurs du paramètre m.

   b) Déterminer, pour chaque valeur de m, le sous-espace propre de H_m associé à la valeur propre a. Montrer qu'on peut trouver un vecteur non nul v_1 appartenant à tous ces sous-espaces.

4. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$.

   Déterminer les vecteurs $h_m(v_2)$ et $h_m(v_3)$ et montrer que ces vecteurs appartiennent à F pour tout m réel.

5. En se plaçant dans la base de $\mathbb{R}^3$ formée par les vecteurs v_1, v_2 et v_3, déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice H_m est diagonalisable.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

LES ANNALES

EXERCICE II

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée. On associe à cette expérience une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Notation : Si Z est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on note $\mathrm{E}(Z)$ son espérance.

N.B. La partie **II** peut être traitée indépendamment de la partie **I**.

I. Préliminaire

1. a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n.

b) Quelles sont l'espérance et la variance de S_n ?

2. a) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver une constante K_ε telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on ait l'inégalité $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}$.

b) Déduire de la majoration obtenue que, pour tout réel r vérifiant $0 < r < \frac{1}{2}$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0$$

3. Montrer d'autre part, à l'aide du théorème de la limite centrée, que la suite définie pour n supérieur ou égal à 1 par $n \mapsto \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ admet une limite non nulle.

L'objet de la suite de l'exercice est l'étude d'une majoration de la probabilité $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right)$ *meilleure que la majoration obtenue à la question* 2.a.

II. Étude de fonctions

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$.

1. a) Étudier les variations de la fonction f.

b) Montrer qu'il existe des réels α et β, que l'on déterminera, tels que l'on ait :

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$$

c) Montrer de même qu'il existe des réels α' et β', tels que l'on ait :

$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (\alpha' x + \beta')) = 0$$

2. Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et soit φ_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_a(x) = f(x) - ax$.

a) Étudier les variations de la fonction φ_a et préciser les valeurs de $\varphi_a(0)$ et de $\varphi_a'(0)$. Montrer que la fonction φ_a atteint un minimum en un unique point x_a de $\mathbb{R}$ dont on donnera l'expression en fonction de a.

b) Étudier le signe de x_a suivant les valeurs de a. Montrer, pour tout réel a vérifiant $a \neq \frac{1}{2}$, l'inégalité : $e^{\varphi_a(x_a)} < 1$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

Dans toute la suite, pour tout réel a vérifiant $0 < a < 1$, on pose $h_a = e^{\varphi_a(x_a)}$.

III. Étude de l'écart de $\dfrac{S_n}{n}$ à sa moyenne

1. Montrer que si Z est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs réelles positives $z_1, z_2, \ldots, z_r$, on a la majoration $\mathbf{P}(Z \geq 1) \leq \mathrm{E}(Z)$.

2. Calculer, pour tout réel u et tout entier n supérieur ou égal à 1, l'espérance $\mathrm{E}(e^{uS_n})$. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, si a est un réel vérifiant $0 < a < 1$ et t un réel quelconque, on a :

$$\mathrm{E}\left(e^{t\left(\frac{S_n}{n} - a\right)}\right) = e^{n\,\varphi_a\left(\frac{t}{n}\right)}$$

3. *On suppose, dans cette question, que a est un réel vérifiant* $\dfrac{1}{2} < a < 1$.

   a) Montrer que, pour tout réel t strictement positif et tout entier n supérieur ou égal à 1, on a l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - a \geq 0\right) \leq e^{n\,\varphi_a\left(\frac{t}{n}\right)}$$

   b) En donnant à t, dans l'inégalité précédente, une valeur convenablement choisie, établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'inégalité

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (h_a)^n$$

4. Soit un réel ε vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$; on pose $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

   a) Comparer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, les lois de probabilité des variables aléatoires S_n et $n - S_n$. En déduire l'égalité :

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq 1 - a\right)$$

   puis la majoration :

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2(h_a)^n$$

   En quoi cette majoration peut-elle être considérée, pour ε strictement positif fixé, comme meilleure que celle de la question I.2.a ?

   b) À l'aide de l'expression de x_a trouvée à la question II.2.a, établir l'égalité :

$$\varphi_a(x_a) = -\left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\ln(1 + 2\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\ln(1 - 2\varepsilon)\right)$$

5. a) En déduire qu'on a : $\varphi_{\frac{1}{2}+\varepsilon}(x_{\frac{1}{2}+\varepsilon}) = -2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$, quand ε tend vers 0.

   b) Montrer qu'on peut retrouver ainsi la limite obtenue à la question I.2.b.

IV. Étude d'un algorithme

On se propose d'illustrer cet exercice par une simulation. On considère pour cela le programme Turbo-Pascal `Simulation` reproduit ci-dessous dans lequel `RANDOM(100)` désigne un nombre entier tiré au hasard par l'ordinateur, avec la loi uniforme, dans l'intervalle [0,99] (la procédure `RANDOMIZE` sert à initialiser la fonction `RANDOM`).

LES ANNALES

Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

1. Que fait la procédure EP de ce programme ?
2. Quels nombres entiers sont comptabilisés dans les variables U, V et W à la fin du programme ?
3. De quels nombres les valeurs de P1, P2 et P3 fournies par le programme sont-elles des estimations ?
4. À quoi peut-on s'attendre pour la valeur de P1 ?

```
PROGRAM Simulation;
VAR
     n,K,U,V,W,i,j,X : INTEGER;
     S : REAL;
CONST
     nombre_de_lancers = 20000;
     nombre_d_essais = 2000;
PROCEDURE EP(n:INTEGER);
     BEGIN
       S:= 0;
       FOR i:=1 TO n DO
       BEGIN
         X:= RANDOM(100);
         IF X>49 THEN S:= S+1;
       END;
     END;
BEGIN
     RANDOMIZE;
     n:=nombre_de_lancers;
     K:=nombre_d_essais;
     U:=0; V:=0; W:=0;
     FOR j:=1 TO K DO
       BEGIN
         EP(n);
         IF Abs(S/n-0.5) > exp((-0.4)*Ln(n)) THEN U:=U+1;
         IF Abs(S/n-0.5) > exp((-0.5)*Ln(n)) THEN V:=V+1;
         IF Abs(S/n-0.9) > exp((-0.9)*Ln(n)) THEN W:=W+1;
       END;
     WRITELN ('P1 = ' ,U/K);
     WRITELN ('P2 = ' ,V/K);
     WRITELN ('P3 = ' ,W/K);
END.
```


Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

HEC III

CORRIGE

EXERCICE I

QUESTION–1

a) $M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

λ est valeur propre de M_2 si et seulement si $M_2 - \lambda I$ n'est pas inversible (I est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), c'est-à-dire si le système ($\mathbf{S}_2$) n'est pas de Cramer.

$$(\mathbf{S}_2)\ \begin{cases} (-3-\lambda)x + 2y + 2z &= 0 \\ -2x + (1-\lambda)y + 2z &= 0 \\ -2x + 2y + (1-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

On effectue $L_1 \longleftrightarrow L_2$. ($\mathbf{S}_2$) équivaut à :

$$\begin{cases} -2x + (1-\lambda)y + 2z &= 0 \\ (-3-\lambda)x + 2y + 2z &= 0 \\ -2x + 2y + (1-\lambda)z &= 0 \end{cases}$$

$L_2 \longleftarrow 2L_2 + (-3-\lambda)L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$.

$$\begin{cases} -2x + (1-\lambda)y + 2z &= 0 \\ (\lambda+1)^2 y - 2(\lambda+1)z &= 0 \\ (\lambda+1)y - (\lambda+1)z &= 0 \end{cases}$$

On échange alors l'ordre des inconnues y et z et $L_3 \longleftarrow -2L_3 + L_2$

$$\begin{cases} -2x + 2z + (1-\lambda)y &= 0 \\ -2(1+\lambda)z + (1+\lambda)^2 y &= 0 \\ (\lambda+1)(\lambda-1)y &= 0. \end{cases}$$

Le dernier système est triangulaire, il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un des coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire

$$\lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 1.$$

$$\boxed{\text{Donc } \operatorname{spect}(M_2) = \{-1, 1\}.}$$

- Pour $\lambda = -1$.

($\mathbf{S}_2$) équivaut à $-2x + 2z + 2y = 0$, soit $-x + z + y = 0$.

Le sous-espace propre $E(2,-1)$ de h_2 associé à la valeur propre -1 est :

$$\begin{aligned} E(2,-1) &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ -x+y+z = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x = y+z\right\} \\ &= \left\{(y+z,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{y(1,1,0) + z(1,0,1) \ /\ (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} \end{aligned}$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

$$\boxed{E(2,-1) = \text{vect}\Big((1,1,0),(1,0,1)\Big).}$$

La famille $\Big((1,1,0),(1,0,1)\Big)$ est donc génératrice de $E(2,-1)$; de plus ces deux triplets ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre.

$$\boxed{\text{La famille } \Big((1,1,0),(1,0,1)\Big) \text{ est une base de } E(2,-1) \text{ ; } \dim E(2,-1) = 2.}$$

- Pour $\lambda = 1$.

(S$_2$) équivaut à $\begin{cases} -2x+2z & =0 \\ -4z+4y & =0 \end{cases}$

Soit finalement $x = y = z$.

Le sous-espace propre $E(2,1)$ de h_2 associé à la valeur propre 1 est :

$$\begin{aligned} E(2,1) &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\big\} \\ &= \big\{(x,x,x) \ / \ x \in R\big\} \\ &= \big\{x(1,1,1) \ / \ x \in R\big\} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(2,1) = \text{vect}\Big((1,1,1)\Big) \text{ ; } \dim E(2,1) = 1.}$$

b)

$$\boxed{\dim E(2,-1) + \dim E(2,1) = 3 = \dim \mathbb{R}^3, \ H_2 \text{ est diagonalisable.}}$$

Pour avoir une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de h_2, il suffit de réunir une base de $E(2,-1)$ et une base de $E(2,1)$. On peut prendre

par exemple $\boxed{\Big((1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\Big).}$

QUESTION–2

On raisonne comme à la question 1) : le système conduisant aux valeurs propres de H_0 est :

(S$_0$)
$$\begin{cases} (1-\lambda)x \ +2z & =0 \\ (1-\lambda)y & =0 \\ -2x+(3-\lambda)z & =0 \end{cases}$$

On effectue $L_1 \longleftrightarrow L_3$; il équivaut à :

$$\begin{cases} -2x+(3-\lambda)z & =0 \\ (1-\lambda)y & =0 \\ (1-\lambda)x \ +2z & =0 \end{cases}$$

On effectue $L_3 \longleftarrow (1+\lambda)L_1 - 2L_3$; il équivaut à :

$$\begin{cases} -2x+(3-\lambda)z & =0 \\ (1-\lambda)y & =0 \\ -(\lambda-1)^2 z & =0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{spect}(H_0) = \{1\}.}$$

- Pour $\lambda = 1$.

(S$_0$) équivaut à $x = z, \ \ y \in \mathbb{R}$.

Le sous-espace propre de h_0 associé à $\lambda = 1$ est :

$$\begin{aligned} E(0,1) &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = z\big\} \\ &= \big\{(x,y,x) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \big\{x(1,0,1) + y(0,1,0) \ / \ (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} \end{aligned}$$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.

$$\boxed{E(0,1) = \text{vect}\Big((1,0,1),(0,1,0)\Big).}$$

La famille $\Big((1,0,1),(0,1,0)\Big)$ est génératrice de $E(0,1)$, elle est libre car les deux triplets ne sont pas proportionnels, donc

$$\boxed{\begin{array}{l}\Big((1,0,1),(0,1,0)\Big) \text{ est une base de } E(0,1) : \dim E(0,1) = 2.\\ \text{On n'a pas } \dim E(0,1) = \dim \mathbb{R}^3 : h_0 \text{ n'est pas diagonalisable.}\end{array}}$$

QUESTION–3

a)

D'après les résultats obtenus aux questions 1) et 2), seule 1 est valeur propre commune à h_2 et h_0. **S'il existe une valeur propre commune à tous les h_m, ce ne peut être que 1.**

Vérifions-le :

$$H_m - I = \begin{pmatrix} (-2-m) & m & 2 \\ -m & 0 & m \\ -2 & m & 2-m \end{pmatrix}$$

On s'aperçoit que la somme des colonnes est nulle ; ce qui veut dire

$$\begin{pmatrix} (-2-m) & m & 2 \\ -m & 0 & m \\ -2 & m & 2-m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $(1,1,1)$ est vecteur propre de h_m pour tout $m \in \mathbb{R}$, associé à la valeur propre 1. **Donc 1 est la valeur propre commune à tous les h_m.**

b)

Résolvons l'équation $h_m(x,y,z) = (x,y,z)$. Elle équivaut au système

$$(\mathbf{S}_m) \qquad \begin{cases} (-2-m)x + my + 2z &= 0 \\ -mx \qquad\qquad + mz &= 0 \\ -2x + my + (2-m)z &= 0 \end{cases}$$

<u>Si $m = 0$.</u>

On a étudié ce cas à la question 2) : $\boxed{E(0,1) = \text{vect}\Big((1,0,1),(0,1,0)\Big).}$

<u>Si $m \neq 0$.</u>

$$(\mathbf{S}_m) \iff \begin{cases} x &= z \text{ d'après } L_2 \\ m(-x+y) &= 0 \text{ d'après } L_1 \text{ et } z = x \\ m(y-z) &= 0 \text{ d'après } L_3 \text{ et } z = x \end{cases}$$
$$\iff x = y = z \text{ car } m \neq 0.$$

$$\boxed{\begin{array}{l} E(m,1) = \text{vect}\Big((1,1,1)\Big) \text{ pour tout } m \neq 0. \\ \text{Dans tous les cas où } m \neq 0, \text{ le vecteur } (1,1,1) \in E(m,1). \end{array}}$$

Remarquons alors que $(1,0,1) \in E(0,1)$, $(0,1,0) \in E(0,1)$. Or $E(0,1)$ est stable pour l'addition (c'est un sous-espace vectoriel).

Donc $(1,0,1) + (0,1,0) = (1,1,1) \in E(0,1)$.

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{R},\ v_1 = (1,1,1) \in E(m,1).}$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 18 pages.