



ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mardi 8 Mai 2001, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

EXERCICE I

On note m un paramètre réel et on considère les matrices H_m définies par

$$H_m = \begin{pmatrix} -1 - m & m & 2 \\ -m & 1 & m \\ -2 & m & 3 - m \end{pmatrix}$$

On note h_m l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 représenté par H_m dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- a) On suppose dans cette question que $m = 2$. Déterminer les valeurs propres de la matrice H_2 et les sous-espaces propres associés.
b) La matrice H_2 est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une base de vecteurs propres.
- Etudier de même les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice H_0 . Cette matrice est-elle diagonalisable ?
- a) Montrer qu'il existe un réel a , qu'on déterminera, qui est une valeur propre de la matrice H_m pour toutes les valeurs du paramètre m .
b) Déterminer, pour chaque valeur de m , le sous-espace propre de H_m associé à la valeur propre a . Montrer qu'on peut trouver un vecteur non nul v_1 appartenant à tous ces sous-espaces.
- Soit F le sous-espace de \mathbb{R}^3 engendré par les vecteurs $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$.
Déterminer les vecteurs $h_m(v_2)$ et $h_m(v_3)$ et montrer que ces vecteurs appartiennent à F pour tout m réel.
- En se plaçant dans la base de \mathbb{R}^3 formée par les vecteurs v_1, v_2 et v_3 , déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice H_m est diagonalisable.

EXERCICE II

On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce de monnaie équilibrée. On associe à cette expérience une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Notation : Si Z est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, on note $E(Z)$ son espérance.

N.B. La partie II peut être traitée indépendamment de la partie I.

I. Préliminaire

1. a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire S_n .
b) Quelles sont l'espérance et la variance de S_n ?
2. a) Montrer que, pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver une constante K_ε telle que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on ait l'inégalité $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{K_\varepsilon}{n}$.
b) Dédurre de la majoration obtenue que, pour tout réel r vérifiant $0 < r < \frac{1}{2}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{n^r}\right) = 0$$

3. Montrer d'autre part, à l'aide du théorème de la limite centrée, que la suite définie pour n supérieur ou égal à 1 par $n \mapsto \mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ admet une limite non nulle.

L'objet de la suite de l'exercice est l'étude d'une majoration de la probabilité $\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right)$ meilleure que la majoration obtenue à la question 2.a.

II. Étude de fonctions

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{2}\right)$.

1. a) Étudier les variations de la fonction f .
b) Montrer qu'il existe des réels α et β , que l'on déterminera, tels que l'on ait :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$$

- c) Montrer de même qu'il existe des réels α' et β' , tels que l'on ait :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (\alpha'x + \beta')) = 0$$

2. Soit a un réel vérifiant $0 < a < 1$ et soit φ_a la fonction définie sur \mathbb{R} par $\varphi_a(x) = f(x) - ax$.
a) Étudier les variations de la fonction φ_a et préciser les valeurs de $\varphi_a(0)$ et de $\varphi'_a(0)$. Montrer que la fonction φ_a atteint un minimum en un unique point x_a de \mathbb{R} dont on donnera l'expression en fonction de a .
b) Étudier le signe de x_a suivant les valeurs de a . Montrer, pour tout réel a vérifiant $a \neq \frac{1}{2}$, l'inégalité : $e^{\varphi_a(x_a)} < 1$.

Dans toute la suite, pour tout réel a vérifiant $0 < a < 1$, on pose $h_a = e^{\varphi_a(x_a)}$.

III. Étude de l'écart de $\frac{S_n}{n}$ à sa moyenne

1. Montrer que si Z est une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs réelles positives z_1, z_2, \dots, z_r , on a la majoration $\mathbf{P}(Z \geq 1) \leq \mathbf{E}(Z)$.
2. Calculer, pour tout réel u et tout entier n supérieur ou égal à 1, l'espérance $\mathbf{E}(e^{uS_n})$. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, si a est un réel vérifiant $0 < a < 1$ et t un réel quelconque, on a :

$$\mathbf{E}\left(e^{t\left(\frac{S_n}{n} - a\right)}\right) = e^{n\varphi_a\left(\frac{t}{n}\right)}$$

3. On suppose, dans cette question, que a est un réel vérifiant $\frac{1}{2} < a < 1$.

a) Montrer que, pour tout réel t strictement positif et tout entier n supérieur ou égal à 1, on a l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} - a \geq 0\right) \leq e^{n\varphi_a\left(\frac{t}{n}\right)}$$

b) En donnant à t , dans l'inégalité précédente, une valeur convenablement choisie, établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, l'inégalité

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) \leq (h_a)^n$$

4. Soit un réel ε vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$; on pose $a = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

a) Comparer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, les lois de probabilité des variables aléatoires S_n et $n - S_n$. En déduire l'égalité :

$$\mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq a\right) = \mathbf{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq 1 - a\right)$$

puis la majoration :

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2(h_a)^n$$

En quoi cette majoration peut-elle être considérée, pour ε strictement positif fixé, comme meilleure que celle de la question I.2.a ?

b) À l'aide de l'expression de x_a trouvée à la question II.2.a, établir l'égalité :

$$\varphi_a(x_a) = -\left(\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\ln(1 + 2\varepsilon) + \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\ln(1 - 2\varepsilon)\right)$$

5. a) En déduire qu'on a : $\varphi_{\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(x_{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) = -2\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$, quand ε tend vers 0.

b) Montrer qu'on peut retrouver ainsi la limite obtenue à la question I.2.b.

IV. Étude d'un algorithme

On se propose d'illustrer cet exercice par une simulation. On considère pour cela le programme Turbo-Pascal Simulation reproduit ci-dessous dans lequel `RANDOM(100)` désigne un nombre entier tiré au hasard par l'ordinateur, avec la loi uniforme, dans l'intervalle $[0,99]$ (la procédure `RANDOMIZE` sert à initialiser la fonction `RANDOM`).





1. Que fait la procédure EP de ce programme ?
2. Quels nombres entiers sont comptabilisés dans les variables U, V et W à la fin du programme ?
3. De quels nombres les valeurs de P1, P2 et P3 fournies par le programme sont-elles des estimations ?
4. À quoi peut-on s'attendre pour la valeur de P1 ?

```
PROGRAM Simulation;
VAR
  n,K,U,V,W,i,j,X : INTEGER;
  S : REAL;
CONST
  nombre_de_lancers = 20000;
  nombre_d_essais = 2000;
PROCEDURE EP(n:INTEGER);
  BEGIN
    S:= 0;
    FOR i:=1 TO n DO
      BEGIN
        X:= RANDOM(100);
        IF X>49 THEN S:= S+1;
      END;
    END;
  BEGIN
    RANDOMIZE;
    n:=nombre_de_lancers;
    K:=nombre_d_essais;
    U:=0; V:=0; W:=0;
    FOR j:=1 TO K DO
      BEGIN
        EP(n);
        IF Abs(S/n-0.5) > exp((-0.4)*Ln(n)) THEN U:=U+1;
        IF Abs(S/n-0.5) > exp((-0.5)*Ln(n)) THEN V:=V+1;
        IF Abs(S/n-0.5) > exp((-0.9)*Ln(n)) THEN W:=W+1;
      END;
    WRITELN ('P1 = ',U/K);
    WRITELN ('P2 = ',V/K);
    WRITELN ('P3 = ',W/K);
  END.
```

LES
ANNALES



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

HEC III

CORRIGE

EXERCICE I

QUESTION-1

$$\text{a) } M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

λ est valeur propre de M_2 si et seulement si $M_2 - \lambda I$ n'est pas inversible (I est la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), c'est-à-dire si le système (S_2) n'est pas de Cramer.

$$(S_2) \begin{cases} (-3 - \lambda)x + 2y + 2z & = 0 \\ -2x + (1 - \lambda)y + 2z & = 0 \\ -2x + 2y + (1 - \lambda)z & = 0 \end{cases}$$

On effectue $L_1 \leftrightarrow L_2$. (S_2) équivaut à :

$$\begin{cases} -2x + (1 - \lambda)y + 2z & = 0 \\ (-3 - \lambda)x + 2y + 2z & = 0 \\ -2x + 2y + (1 - \lambda)z & = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow 2L_2 + (-3 - \lambda)L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$.

$$\begin{cases} -2x + (1 - \lambda)y + 2z & = 0 \\ (\lambda + 1)^2 y - 2(\lambda + 1)z & = 0 \\ (\lambda + 1)y - (\lambda + 1)z & = 0 \end{cases}$$

On échange alors l'ordre des inconnues y et z et $L_3 \leftarrow -2L_3 + L_2$

$$\begin{cases} -2x + 2z + (1 - \lambda)y & = 0 \\ -2(1 + \lambda)z + (1 + \lambda)^2 y & = 0 \\ (\lambda + 1)(\lambda - 1)y & = 0. \end{cases}$$

Le dernier système est triangulaire, il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un des coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire

$$\lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 1.$$

$$\text{Donc } \text{spect}(M_2) = \{-1, 1\}.$$

- Pour $\lambda = -1$.

(S_2) équivaut à $-2x + 2z + 2y = 0$, soit $-x + z + y = 0$.

Le sous-espace propre $E(2, -1)$ de h_2 associé à la valeur propre -1 est :

$$\begin{aligned} E(2, -1) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + y + z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y + z\} \\ &= \{(y + z, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1) / (y, z) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

$$E(2, -1) = \text{vect} \left((1, 1, 0), (1, 0, 1) \right).$$

La famille $\left((1, 1, 0), (1, 0, 1) \right)$ est donc génératrice de $E(2, -1)$; de plus ces deux triplets ne sont pas proportionnels, donc ils forment une famille libre.

$$\text{La famille } \left((1, 1, 0), (1, 0, 1) \right) \text{ est une base de } E(2, -1) ; \dim E(2, -1) = 2.$$

• Pour $\lambda = 1$.

$$(\mathbf{S}_2) \text{ équivaut à } \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ -4z + 4y = 0 \end{cases}$$

Soit finalement $x = y = z$.

Le sous-espace propre $E(2, 1)$ de h_2 associé à la valeur propre 1 est :

$$\begin{aligned} E(2, 1) &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = y = z \} \\ &= \{ (x, x, x) / x \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ x(1, 1, 1) / x \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

$$E(2, 1) = \text{vect} \left((1, 1, 1) \right) ; \dim E(2, 1) = 1.$$

b)

$$\dim E(2, -1) + \dim E(2, 1) = 3 = \dim \mathbb{R}^3, H_2 \text{ est diagonalisable.}$$

Pour avoir une base de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de h_2 , il suffit de réunir une base de $E(2, -1)$ et une base de $E(2, 1)$. On peut prendre

par exemple $\left((1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1) \right)$.

QUESTION-2

On raisonne comme à la question 1) : le système conduisant aux valeurs propres de H_0 est :

$$(\mathbf{S}_0) \quad \begin{cases} (1 - \lambda)x + 2z = 0 \\ (1 - \lambda)y = 0 \\ -2x + (3 - \lambda)z = 0 \end{cases}$$

On effectue $L_1 \leftrightarrow L_3$; il équivaut à :

$$\begin{cases} -2x + (3 - \lambda)z = 0 \\ (1 - \lambda)y = 0 \\ (1 - \lambda)x + 2z = 0 \end{cases}$$

On effectue $L_3 \leftarrow (1 + \lambda)L_1 - 2L_3$; il équivaut à :

$$\begin{cases} -2x + (3 - \lambda)z = 0 \\ (1 - \lambda)y = 0 \\ -(\lambda - 1)^2 z = 0 \end{cases}$$

$$\text{spect}(H_0) = \{1\}.$$

• Pour $\lambda = 1$.

(\mathbf{S}_0) équivaut à $x = z, y \in \mathbb{R}$.

Le sous-espace propre de h_0 associé à $\lambda = 1$ est :

$$\begin{aligned} E(0, 1) &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z \} \\ &= \{ (x, y, x) / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \{ x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} \end{aligned}$$

$$E(0, 1) = \text{vect} \left((1, 0, 1), (0, 1, 0) \right).$$

La famille $\left((1, 0, 1), (0, 1, 0) \right)$ est génératrice de $E(0, 1)$, elle est libre car les deux triplets ne sont pas proportionnels, donc

$\left((1, 0, 1), (0, 1, 0) \right)$ est une base de $E(0, 1) : \dim E(0, 1) = 2$.
On n'a pas $\dim E(0, 1) = \dim \mathbb{R}^3 : h_0$ n'est pas diagonalisable.

QUESTION-3

a)

D'après les résultats obtenus aux questions 1) et 2), seule 1 est valeur propre commune à h_2 et h_0 . **S'il existe une valeur propre commune à tous les h_m , ce ne peut être que 1.**

Vérifions-le :

$$H_m - I = \begin{pmatrix} (-2-m) & m & 2 \\ -m & 0 & m \\ -2 & m & 2-m \end{pmatrix}$$

On s'aperçoit que la somme des colonnes est nulle ; ce qui veut dire

$$\begin{pmatrix} (-2-m) & m & 2 \\ -m & 0 & m \\ -2 & m & 2-m \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $(1, 1, 1)$ est vecteur propre de h_m pour tout $m \in \mathbb{R}$, associé à la valeur propre 1. **Donc 1 est la valeur propre commune à tous les h_m .**

b)

Résolvons l'équation $h_m(x, y, z) = (x, y, z)$. Elle équivaut au système

$$(S_m) \quad \begin{cases} (-2-m)x + my + 2z = 0 \\ -mx + mz = 0 \\ -2x + my + (2-m)z = 0 \end{cases}$$

Si $m = 0$.

On a étudié ce cas à la question 2) : $E(0, 1) = \text{vect} \left((1, 0, 1), (0, 1, 0) \right)$.

Si $m \neq 0$.

$$(S_m) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \text{ d'après } L_2 \\ m(-x + y) = 0 \text{ d'après } L_1 \text{ et } z = x \\ m(y - z) = 0 \text{ d'après } L_3 \text{ et } z = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z \text{ car } m \neq 0.$$

$$E(m, 1) = \text{vect} \left((1, 1, 1) \right) \text{ pour tout } m \neq 0.$$

Dans tous les cas où $m \neq 0$, le vecteur $(1, 1, 1) \in E(m, 1)$.

Remarquons alors que $(1, 0, 1) \in E(0, 1)$, $(0, 1, 0) \in E(0, 1)$. Or $E(0, 1)$ est stable pour l'addition (c'est un sous-espace vectoriel).

Donc $(1, 0, 1) + (0, 1, 0) = (1, 1, 1) \in E(0, 1)$.

$$\forall m \in \mathbb{R}, v_1 = (1, 1, 1) \in E(m, 1).$$