ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option économique

MATHEMATIQUES III

Mercredi 2 Mai 2001 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1 *(Etude d'une suite de nombres réels)*

On étudie dans cet exercice la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

A cet effet, on introduit pour tout nombre entier $k \geq 0$ les deux intégrales suivantes :

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\,dt \quad ; \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\,dt.$$

1°) <u>Convergence de la suite (J_k/I_k)</u>

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t).$$

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 0$:

$$0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1}).$$

c) Exprimer I_{k+1} en fonction de I_k en intégrant par parties l'intégrale I_{k+1} (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2k+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

d) Déduire des résultats précédents que J_k/I_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

2°) Convergence et limite de la suite (S_n)

a) Exprimer I_k en fonction de J_k et J_{k-1} en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_k $(k \geq 1)$.

b) En déduire la relation suivante pour $k \geq 1$:

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}.$$

c) Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

d) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En déduire un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, puis de $S - S_n$, et montrer que :

$$0 \leq S_n - S + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Autrement dit, $S_n + \frac{1}{n}$ *constitue une valeur approchée de* S *à* $\frac{1}{n^2}$ *près.*

e) Ecrire un programme en PASCAL calculant et affichant une valeur approchée du nombre S à 10^{-6} près.

EXERCICE 2 *(Algèbre linéaire et étude d'une marche aléatoire)*

Cet exercice a pour but l'étude d'une marche aléatoire sur les sommets d'un triangle, ce qui fait l'objet de la partie II. Dans la partie I, on aborde des questions préliminaires d'algèbre linéaire.

Partie I

On associe à tout triplet (x, y, z) de nombres réels la matrice $M(x, y, z)$ définie par :

$$M(x,y,z) = \begin{bmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{bmatrix}.$$

La matrice $M(1, 0, 0)$ n'est autre que la matrice identité I_3 et la matrice $M(0, 1, 0)$ est notée J.

1°) L'espace vectoriel E des matrices $M(x, y, z)$

a) Calculer les matrices J^2 et J^3.

b) Etablir que l'ensemble E des matrices de la forme $M(x, y, z)$ où (x, y, z) décrit $\mathbb{R}^3$ constitue un sous-espace vectoriel de l'espace $M_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3.

c) Etablir que (I_3, J, J^2) forme une base de E.

2°) Matrices inversibles de l'espace vectoriel E

a) Calculer le produit $M(x, y, z) \times M(x', y', z')$ et montrer que celui-ci est élément de E. Les matrices $M(x, y, z)$ et $M(x', y', z')$ commutent-elles?

b) En déduire l'égalité suivante :

$$M(x,y,z) \times M(x^2 - yz, z^2 - xy, y^2 - zx) = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2]I_3.$$

c) Etablir qu'une condition suffisante pour que $M(x, y, z)$ soit inversible est que x, y, z soient tels que $x+y+z \neq 0$ et pas tous égaux. Quelle est alors la matrice inverse de $M(x, y, z)$?

d) Etablir enfin que cette condition suffisante d'inversibilité est également nécessaire.

3°) Eléments propres des matrices $M(x, y, z)$

a) Etablir qu'un nombre réel λ est valeur propre de $M(x, y, z)$ si et seulement si $M(x-\lambda, y, z)$ n'est pas inversible.

b) Montrer que $x+y+z$ est valeur propre de $M(x, y, z)$ et préciser le sous-espace propre associé.

c) On suppose ici que $y \neq z$. Montrer que $M(x, y, z)$ n'a pas d'autre valeur propre. La matrice $M(x, y, z)$ est-elle diagonalisable?

d) On suppose ici que $y = z$. Montrer sans calcul que $M(x, y, y)$ est diagonalisable, et préciser quelles sont ses valeurs propres.

4°) Diagonalisation des matrices $M(x, y, y)$

a) Calculer les produits matriciels suivants :

$$M(x,y,y)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad ; \quad M(x,y,y)\begin{bmatrix}+1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad ; \quad M(x,y,y)\begin{bmatrix}+1\\0\\-1\end{bmatrix}.$$

b) Déterminer deux matrices P et P^{-1} inverses l'une de l'autre telles que :

$$P^{-1}M(x,y,y)P = \begin{bmatrix}x+2y & 0 & 0\\0 & x-y & 0\\0 & 0 & x-y\end{bmatrix}.$$

c) En déduire la relation suivante pour tout nombre entier naturel n :

$$[M(x, y, y)]^n = \frac{1}{3}(x+2y)^n M(1, 1, 1) + \frac{1}{3}(x-y)^n M(2, -1, -1).$$

Partie II

On désigne dans toute cette partie par p un nombre réel tel que $0 < p < 1/2$ et on considère la marche aléatoire d'un point S sur les sommets d'un triangle ABC.

A l'instant initial $t = 0$, le point S est en A, et il se déplace ensuite selon les règles suivantes :

- Si S est à l'instant n au sommet A du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet B avec la probabilité p, au sommet C avec la probabilité p, ou encore au sommet A avec la probabilité $1-2p$.
- Si S est à l'instant n au sommet B du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet C avec la probabilité p, au sommet A avec la probabilité p, ou encore au sommet B avec la probabilité $1-2p$.
- Si S est à l'instant n au sommet C du triangle : il est à l'instant $n+1$ au sommet A avec la probabilité p, au sommet B avec la probabilité p, ou encore au sommet C avec la probabilité $1-2p$.

Pour tout nombre entier naturel n, on désigne enfin par :

- A_n l'événement "le point S est au sommet A à l'instant n" et par a_n sa probabilité.
- B_n l'événement "le point S est au sommet B à l'instant n" et par b_n sa probabilité.
- C_n l'événement "le point S est au sommet C à l'instant n" et par c_n sa probabilité.

1°) Calcul des probabilités a_n, b_n, c_n

a) Exprimer à l'aide de la formule des probabilités totales les probabilités a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} en fonction des probabilités a_n, b_n, c_n.

b) En déduire une matrice M telle qu'on ait pour tout nombre entier naturel n :

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}.$$

c) En déduire en fonction de p les probabilités a_n, b_n, c_n et leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

2°) Nombres moyens des passages en A, B, C entre les instants 1 et n

a) On désigne dans cette question par X_n la variable aléatoire prenant la valeur 1 lorsque S est au sommet A à l'instant n, et prenant la valeur 0 sinon.
Interpréter la variable aléatoire $X_1+X_2+ \dots +X_n$ et son espérance $m_n = E(X_1+X_2+ \dots +X_n)$, puis établir que :

$$m_n = \frac{1}{3}[n + 2(1-3p)\frac{1-(1-3p)^n}{3p}].$$

Donner un équivalent de m_n lorsque n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer les espérances des nombres de passage du point S au sommet B et au sommet C entre les instants 1 et n (compris).

3°) Instant moyen du premier passage du point S aux sommets B ou C

a) Déterminer la probabilité conditionnelle de l'événement B_{n+1} sachant que l'événement $\overline{B}_n$ (événement contraire de B_n) est réalisé.

b) On note T_B la variable aléatoire indiquant l'instant où, pour la première fois, le point S est au sommet B. Déterminer la loi de T_B, puis l'espérance $E(T_B)$ de T_B.

c) Que dire de T_C, variable aléatoire indiquant l'instant où, pour la première fois, le point S est au sommet C ?

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

D'après ESSEC MATH III

CORRIGE

ESSEC III : formule de Stirling

EXERCICE

QUESTION–1

a) Cette inégalité est due à la concavité de la fonction sin sur l'intervalle $I = [0; \frac{\pi}{2}]$.

Rappelons qu'une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle et dont la dérivée seconde est négative est concave : géométriquement cela veut dire que pour tous points A et B de la courbe représentative de f, la portion de courbe comprise entre A et B est au dessus du segment $[A; B]$.

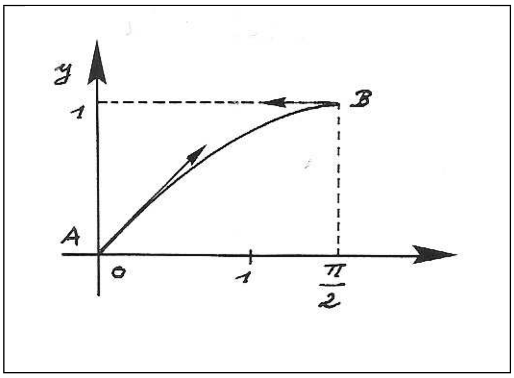
Appliquons ce résultat à la fonction sin sur l'intervalle I.

$\sin'' = -\sin \leq 0$ sur I ; donc sin est effectivement concave sur I.

Considérons les points A et B de coordonnées respectives $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$. On vérifie facilement qu'ils sont sur la courbe représentative de sin et que la droite (A, B) a pour équation $y = \frac{2}{\pi}x$. Pour cela, on peut vérifier que $(0, 0)$ et $(\frac{\pi}{2}, 1)$ satisfont à l'équation de la droite.

La concavité donne alors :

$\forall t \in I,\ \sin t \geq \frac{2}{\pi}t$; inégalité équivalente à : $\boxed{\forall t \in I,\ t \leq \frac{\pi}{2}\sin t}$ car $\frac{\pi}{2} > 0$.



• Il existe une autre méthode plus traditionnelle qui consiste à étudier la fonction différence, d, définie sur I par $d(t) = -t + \frac{\pi}{2}\sin t$.

$$\begin{aligned} d'(t) &= -1 + \frac{\pi}{2}\cos t \\ d''(t) &= -\frac{\pi}{2}\sin t \leq 0 \quad \text{sur } I. \end{aligned}$$

On obtient les tableaux de variations suivants :

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$d''(t)$		$-$		$-$	
$d'(t)$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$d'(t)$		$+$		$-$	
d	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On constate que $d(t) \geq 0$ sur I, ce qui est l'inégalité demandée.

b)

$$
\begin{aligned}
I_k - I_{k+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2}(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2k}(t) - \cos^{2(k+2)}(t))dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)(1-\cos^2(t))dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\sin^2(t)dt,
\end{aligned}
$$

d'après la relation **fondamentale** de la trigonométrie.

Or sur I, $\frac{\pi}{2}\sin(t) \geq t$. Cela équivaut à $\sin(t) \geq \frac{2}{\pi}t \geq 0$.

S'agissant d'inégalités entre nombres positifs, on peut élever au carré. On obtient $\sin^2(t) \geq \frac{4}{\pi^2}t^2$. Multiplions cette inégalité par $\cos^{2k}(t) \geq 0$, on obtient $\sin^2(t)\cos^{2k}(t) \geq \frac{4}{\pi^2}t^2\cos^{2k}(t)$.

Intégrons cette inégalité entre 0 et $\frac{\pi}{2}$; comme les **bornes sont dans l'ordre croissant** on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{2k}(t)dt \geq \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2k}(t)dt, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$I_k - I_{k+1} \geq \frac{4}{\pi^2}J_k.$$

Comme $\frac{4}{\pi^2} > 0$, on peut diviser cette inégalité par $\frac{4}{\pi^2}$, on obtient

$$\boxed{0 \leq J_k \leq \frac{\pi^2}{4}\Big(I_k - I_{k+1}\Big).}$$

c)

$$I_{k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2}(t)dt.$$

Posons donc $\begin{array}{lcl} u(t) = \cos^{2k+1}(t) & ; & u'(t) = -(2k+1)\sin(t)\cos^{2k}(t) \\ v'(t) = \cos(t) & ; & v(t) = \sin(t) \end{array}$

Les fonctions u **et** v **sont de classe** $\mathcal{C}^1$**sur** I, donc

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &= \underbrace{\left[\sin(t)\cos^{2k+1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + (2k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\sin^2(t)dt \\
&= (2k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)(1-\cos^2(t))dt \\
&= (2k+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{2k}(t)-\cos^{2k+2}(t))dt \\
&= (2k+1)\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+2}(t)dt\Big) \\
&= (2k+1)(I_k - I_{k+1}).
\end{aligned}$$

Donc $I_{k+1}(1+2k+1) = (2k+1)I_k$, ce qui donne

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_{k+1} = \frac{2k+1}{2k+2} I_k. \qquad \mathbf{(1)}}$$

d)

Partons de l'encadrement $0 \le J_k \le \frac{\pi^2}{4}\Big(I_k - I_{k+1}\Big)$.

D'après la question précédente, $I_k - I_{k+1} = \frac{2k+2}{2k+1} I_{k+1} - I_{k+1} = \frac{I_{k+1}}{2k+1}$, donc

$$0 \le J_k \le \frac{\pi^2}{4}\frac{I_{k+1}}{2k+1}. \qquad \mathbf{(2)}$$

Divisons par $I_k > 0$. En effet, c'est un théorème peu utilisé, mais pas inutile pour autant, qui donne la justification :

La fonction $\cos^{2k}$ est **continue sur I, positive et non identiquement nulle** (car en fait elle ne s'annule qu'au point $\frac{\pi}{2}$ si $k > 0$ sinon ne s'anule pas).

On sait que dans ces conditions l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k} t dt$ est <u>strictement</u> positive.

L'encadrement **(2)** équivaut à :

$$0 \le \frac{J_k}{I_k} \le \frac{\pi^2}{4(2k+1)}\frac{I_{k+1}}{I_k}. \qquad \mathbf{(3)}$$

Or , d'après l'égalité **(1)**, $\frac{I_{k+1}}{I_k} = \frac{2k+1}{2k+2}$, donc

$\frac{\pi^2}{4(2k+1)}\frac{I_{k+1}}{I_k} = \frac{\pi^2}{4(2k+1)}\frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\pi^2}{4(2k+2)}$.

L'encadrement **(3)** équivaut alors à :

$$0 \le \frac{J_k}{I_k} \le \frac{\pi^2}{4(2k+2)}.$$

$$\boxed{\text{Par encadrement, } \lim_{k\to+\infty} \frac{J_k}{I_k} = 0.}$$

QUESTION–2

a)

$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)dt.$

Faisons une intégration par parties : pour $k \ge 1$.

$u_1(t) = \cos^{2k}(t) \quad ; \quad u_1'(t) = -2k\sin(t)\cos^{2k-1}(t)$

$v_1'(t) = 1 \quad ; \quad v_1(t) = t$

Les fonctions u_1 et v_1 sont de classse $\mathcal{C}^1$ sur I.

$$I_k = \underbrace{\left[t\cos^{2k} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + 2k \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2k-1}(t)dt}_{K_k}. \qquad \mathbf{(4)}$$

Intégrons K_k par parties pour faire apparaître $t^2\cos^{2k-2}(t)$.

$u_2(t) = \sin(t)\cos^{2k-1}(t)$; $u_2'(t) = \cos^{2k}(t) - (2k-1)\sin^2(t)\cos^{2k-2}(t)$

$v_2'(t) = t$; $v_2(t) = \dfrac{t^2}{2}$.

Les fonctions u_2 et v_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Remarquons que

$$\begin{aligned}
u_2'(t) &= \cos^{2k}(t) - (2k-1)\sin^2(t)\cos^{2k-2}(t)\\
&= \cos^{2k}(t) - (2k-1)(1-\cos^2(t))\cos^{2k-2}(t)\\
&= \cos^{2k}(t) - (2k-1)(\cos^{2k-2}(t) - \cos^{2k}(t))\\
&= (1+2k-1)\cos^{2k}(t) - (2k-1)\cos^{2k-2}(t)\\
&= 2k\cos^{2k}(t) - (2k-1)\cos^{2k-2}(t).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_k &= \underbrace{\left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2k-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\Big(2k\cos^{2k}(t) - (2k-1)\cos^{2k-2}(t)\Big)dt\\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 k\cos^{2k}(t)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}(2k-1)\cos^{2k-2}(t)dt
\end{aligned}$$

$$K_k = -kJ_k + \frac{2k-1}{2}J_{k-1}.$$

En reportant dans l'égalité **(4)**, on obtient $I_k = 2k(-kJ_k + \dfrac{2k-1}{2}J_{k-1})$, soit

$$\boxed{I_k = -2k^2 J_k + k(2k-1)J_{k-1}. \qquad \mathbf{(5)}}$$

b)

Utilisons la relation **(1)** entre I_{k+1} et I_k trouvée à la question précédente et remplaçons k par $k-1$: $I_k = \dfrac{2k-1}{2k}I_{k-1}$, pour $k \geq 1$. Cette relation équivaut à $2k^2 I_k = k(2k-1)I_{k-1}$, ou encore $k(2k-1) = 2k^2\dfrac{I_k}{I_{k-1}}$.

Reportons dans l'égalité **(5)** trouvée juste avant :

$$\begin{aligned}
I_k &= -2k^2 J_k + 2k^2\frac{I_k}{I_{k-1}}J_{k-1}\\
&= \frac{2k^2}{I_{k-1}}\Big(-J_k I_{k-1} + I_k J_{k-1}\Big)\\
I_k I_{k-1} &= 2k^2(-J_k I_{k-1} + I_k J_{k-1})\\
&\quad \text{(en divisant par } 2k^2 I_k I_{k-1} \neq 0)\\
\frac{1}{2k^2} &= \frac{-J_k I_{k-1} + I_k J_{k-1}}{I_k I_{k-1}}\\
&= -\frac{J_k I_{k-1}}{I_k I_{k-1}} + \frac{I_k J_{k-1}}{I_k I_{k-1}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2k^2} = -\frac{J_k}{I_k} + \frac{J_{k-1}}{I_{k-1}}.}$$

c)

$$\begin{aligned}
J_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\
J_0 &= \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = \frac{\pi^3}{24}.\\
I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$