



ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option économique

MATHEMATIQUES II

Vendredi 4 Mai 2001 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord de façon générale (partie I), puis dans un cas particulier (partie II).

PARTIE I

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (on rappelle que $V(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante). La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))], \text{ ou encore } E(XY) - E(X)E(Y).$$

1°) Covariance des variables aléatoires X et Y

a) Exprimer $\text{Cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$ en fonction de $V(\lambda X + Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) En déduire que $(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y)$.

A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $(\text{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$?

LES
ANNALES
ESSEC

2°) Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

On suppose dans cette question les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y strictement positives.

- a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\text{Cov}(X, Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1, +1]$.

Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

- b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

- c) On suppose enfin que X suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ et que $Y = X^2$.

Préciser les espérances et les variances de X et Y ainsi que la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y . Etudier alors la réciproque de la question 2°(b).

PARTIE II

1°) Calculs préliminaires

- a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geq q$.

En raisonnant par récurrence sur n , établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^n C_k^q = C_{n+1}^{q+1}.$$

- b) En faisant $q = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des quatre sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k \quad ; \quad \sum_{k=2}^n k(k-1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^2 \quad ; \quad \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2).$$

On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geq 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n .

On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :

- N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré.
- N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré.
- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés.
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

On note $E(N_1)$ et $V(N_1)$, $E(N_2)$ et $V(N_2)$, $E(X)$ et $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$ les espérances et variances des quatre variables aléatoires N_1 , N_2 , X , Y .

2°) Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2

- a) Déterminer les probabilités $P(N_1 = i)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $P(N_2 = j / N_1 = i)$ pour $1 \leq j \leq n, j \neq i$.

En déduire $P(N_2 = j)$ pour $1 \leq j \leq n$, puis comparer les lois de N_1 et N_2 .

- b) Calculer les espérances $E(N_1)$ et $E(N_2)$, les variances $V(N_1)$ et $V(N_2)$.

- c) Déterminer les probabilités $P(N_1 = i \cap N_2 = j)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ en distinguant les deux cas $i = j$ et $i \neq j$ et en déduire que :

$$E(N_1 N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2 .

- d) Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $V(N_1 + N_2)$.

3°) Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables aléatoires X et Y

- a) Montrer que les probabilités $P(X = i \cap Y = j)$ sont égales à $\frac{2}{n(n-1)}$ pour $1 \leq i < j \leq n$.

Que valent-elles sinon?

- b) En déduire les probabilités $P(Y=j)$ pour $2 \leq j \leq n$ et $P(X=i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.
(On vérifiera que les formules donnant $P(Y=j)$ et $P(X=i)$ restent valables si $j=1$ ou $i=n$).
- c) Déterminer les probabilités $P(X=i / Y=j)$ et $P(Y=j / X=i)$ pour $1 \leq i < j \leq n$, puis reconnaître la loi de X conditionnée par $Y=j$ et la loi de Y conditionnée par $X=i$.
- d) Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y , autrement dit les deux probabilités $P(n+1-X=j)$ et $P(Y=j)$ pour $2 \leq j \leq n$.
En déduire que $E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$, puis en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

4°) Espérances et variances des variables aléatoires X et Y

- a) Exprimer les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de n .
b) Exprimer sous forme factorisée $E[(Y-2)]$, puis $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n .

5°) Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

- a) Vérifier que $X+Y = N_1 + N_2$, puis en déduire sous forme factorisée la variance de $X+Y$ et la covariance de X et Y .
b) En déduire le coefficient de corrélation de X et Y .
On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n .

6°) Utilisation de la fonction génératrice des variables aléatoires X et Y

- On se propose de retrouver les résultats précédents par une autre méthode, en ne supposant connues que les probabilités $P(X=i \cap Y=j)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.
On désigne par G la fonction génératrice du couple de variables aléatoires (X, Y) , définie par :

$$G(u, v) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n P(X=i \cap Y=j) (1+u)^i (1+v)^j.$$

- a) Montrer que $\frac{\partial G}{\partial u}(0,0) = E(X)$ et $\frac{\partial G}{\partial v}(0,0) = E(Y)$.

Donner des égalités analogues pour $\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v}(0,0)$.

- b) Montrer, en posant $w = u + v + uv$, c'est à dire $1+w = (1+u)(1+v)$, qu'on a pour $u, v, w \neq 0$:

$$G(u, v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u} \left[\frac{(1+w)^n - 1}{w} - \frac{(1+v)^n - 1}{v} \right].$$

En développant ci-dessus $(1+w)^n$ et $(1+v)^n$, quelle expression de $G(u, v)$ en déduit-on?

- c) Préciser les deux dérivées partielles $\partial w / \partial u$ et $\partial w / \partial v$, puis retrouver sous forme factorisée les nombres $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$ et $V(X)$, $E(Y^2)$ et $V(Y)$, $E(XY)$ et $\text{Cov}(X, Y)$, et pour terminer le coefficient de corrélation des variables aléatoires X et Y .



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

ESSEC MATH II

CORRIGE

La notation $P(A/B)$ est l'ancienne notation pour $P_B(A)$.

PARTIE-I

QUESTION-1

1-a)

Posons $D(\lambda) = \text{cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$. D'une part, $D(\lambda) = V(\lambda X + Y)$.

D'autre part, par définition ,

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= E\left[\left((\lambda X + Y) - E(\lambda X + Y)\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(\lambda(X - E(X)) + (Y - E(Y))\right)^2\right] \\ &\quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &= E\left(\lambda^2(X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2\lambda(X - E(X))(Y - E(Y))\right) \\ &= \lambda^2 E\left((X - E(X))^2\right) + 2\lambda E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) \\ &\quad + E\left((Y - E(Y))^2\right) \quad \text{par linéarité de l'espérance} \end{aligned}$$

$$\text{cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + V(Y).$$

1-b)

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $V(\lambda X + Y) \geq 0$ (c'est une variance). C'est dire que :

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $D(\lambda) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + V(Y) \geq 0$. Comme $V(X) \neq 0$, cette expression est un trinôme en λ . Il est du signe du coefficient de λ^2 , donc **il admet au plus une racine réelle**. Son discriminant Δ est négatif ou nul

Or $\Delta = 4 \text{cov}(X, Y)^2 - 4V(X)V(Y) = 4\left(\text{cov}(X, Y)^2 - V(X)V(Y)\right)$.

$$\text{cov}(X, Y)^2 - V(X)V(Y) \leq 0, \text{ donc } \text{cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y).$$

• On a égalité si et seulement si $\Delta = 0$, ce qui veut dire que le trinôme admet une unique racine réelle, λ_0 .

Traduisons : il existe un unique réel λ_0 / $V(Y + \lambda_0 X) = 0$. On sait d'après le rappel fait dans l'énoncé que cela signifie que la variable $Y + \lambda_0 X$ est constante avec une probabilité égale à 1. Si nous notons μ_0 cette constante nous pouvons affirmer :

$$\text{cov}(X, Y)^2 = V(X)V(Y) \text{ si et seulement s'il existe deux réels } \lambda_0 \text{ et } \mu_0 \text{ tels que } P(Y + \lambda_0 X = \mu_0) = 1.$$

QUESTION-2

2-a)

Par définition, $\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Donc $\rho^2(X, Y) = \frac{(\text{cov}(X, Y))^2}{V(X)V(Y)}$.

D'après la question 1-b), $(\text{cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y)$. Comme $V(X) > 0$ et $V(Y) > 0$, l'inégalité précédente équivaut à $0 \leq \frac{(\text{cov}(X, Y))^2}{V(X)V(Y)} \leq 1$, soit $0 \leq \rho^2(X, Y) \leq 1$.

On a donc l'encadrement : $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

• $\rho(X, Y) = \pm 1 \iff \rho^2(X, Y) = 1 \iff (\text{cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$. Nous avons déjà traité cette question :

$\rho(X, Y) = \pm 1 \iff \exists (\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2 / P(X + \lambda_0 Y = \mu_0) = 1$.

2-b)

C'est du cours : **Si les variables X et Y sont indépendantes, $\text{cov}(X, Y) = 0$, égalité qui équivaut à $\rho(X, Y) = 0$.**

\mathbb{Z} → Rappelons que la réciproque est fautive : la covariance nulle n'implique pas **en général** que les variables sont indépendantes.

2-c)

On sait que $E(X) = 0$ et $V(X) = 1$. On sait également que l'existence de $V(X)$ implique celle de $E(X^2)$. **Donc $E(Y)$ existe.**

De plus, $E(Y) = E(X^2) = V(X)$, car $E(X) = 0$. Donc $E(Y) = 1$.

• **Occupons nous de l'espérance de Y^2 .**

$E(Y^2) = E(X^4)$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^4 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)}_{h(t)} dt$ converge

absolument, mais la fonction que l'on intègre est ici positive.

La fonction h que l'on intègre est continue sur \mathbb{R} , **paire** :

l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$ converge si et seulement si l'intégrale $J = \int_0^{+\infty} h(t) dt$ converge

et s'il en est ainsi, $I = 2J$.

Calculons J .

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Notons $J(a) = \int_0^a h(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a t^4 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$.

Calculons $J(a)$ et regardons ensuite sa limite quand $a \rightarrow +\infty$.

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} u(t) &= t^3 & ; & \quad u'(t) = 3t^2 \\ v'(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) & ; & \quad v(t) = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} J(a) &= \left[-\frac{t^3}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right]_0^a + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= -\frac{a^3}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} a^3 \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) = 0 \text{ par } \mathbf{croissances comparées} \text{ et}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{1}{2}.$$

En effet cette dernière intégrale vaut $\frac{1}{2}V(X)$.

Conclusion : $\lim_{a \rightarrow +\infty} J(a) = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$. Cela prouve que J existe, donc cela prouve aussi que I existe.

En résumé : $E(Y^2) = 2I = 3$. Donc l'espérance de Y^2 existe. La variance de Y est donc

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 3 - 1 = 2.$$

Calculons $\text{cov}(X, Y)$.

$\text{cov}(X, Y) = E(X \times Y) - E(X) \times E(Y) = E(X^3)$ si cette dernière existe, car $Y = X^2$ et $E(X) = 0$.

Or $E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ si cette intégrale converge absolument.

La fonction que l'on intègre est continue sur \mathbb{R} et impaire.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ converge absolument, donc converge, si et seulement si

l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ converge.

Si en est ainsi on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 0$

Sur $[1; \infty[$, on a $0 \leq t^3 \leq t^4$, donc

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^4 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \text{ car } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \geq 0.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^4 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ converge puisque l'intégrale

$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^4 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ converge ; donc **par comparaison des fonctions positives**,

l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^4 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ converge.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ est continue sur $[0; 1]$, donc son intégrale existe et on peut conclure :

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ converge. Donc

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^3 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ converge et vaut 0. L'espérance $E(X \times Y) = 0$. Nous venons de montrer que

$$\text{cov}(X, Y) = E(X \times Y) - E(X)E(Y) = 0 - 0 = 0.$$

Cependant $Y = X^2$, ce qui semble bien vouloir dire que les variables sont liées. Montrons le :

$$P(X \geq 2 \cap Y \leq 1) = P(X \geq 2 \cap X^2 \leq 1) = 0 \text{ car } X \geq 2 \implies X^2 \geq 4.$$

Rappelons que Φ (fonction de répartition de X) est une bijection **strictement croissante** de $] -\infty; +\infty[$ sur $]0; 1[$.

$P(X \geq 2) = 1 - \Phi(2) > 0$ car nous savons que $\Phi \in]0; 1[$. De même $P(Y \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) > 0$, car la fonction Φ est strictement croissante.

Conclusion $P(X \geq 2 \cap Y \leq 1) \neq P(X \geq 2) \times P(Y \leq 1)$.

Les variables X et Y sont liées et leur covariance est nulle. Ceci est donc un exemple qui prouve que la réciproque du résultat : " Indépendance implique covariance nulle " est fausse.

PARTIE -II

QUESTION-1

1-a)

Soit H_n la proposition : $\sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.

Initialisation : pour $n = q$, $\sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \sum_{k=q}^q \binom{k}{q} = \binom{q}{q} = 1 = \binom{q+1}{q+1} = \binom{n+1}{q+1}$.

Donc la propriété H_n est satisfaite pour $n = q$.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $n \geq q$ tel que $\sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} &= \sum_{k=q}^n \binom{k}{q} + \binom{n+1}{q} \\ &= \binom{n+1}{q+1} + \binom{n+1}{q} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= \binom{n+2}{q+1} \quad (\text{d'après la formule de Pascal}) \end{aligned}$$

La propriété H_{n+1} est donc satisfaite :

D'après le principe du raisonnement par récurrence, H_n est satisfaite pour tous les entiers $n \geq q$.

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \left(n \geq q \implies \sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1} \right)$$

1-b)

• Pour $q = 1$. Remarquons qu'il faut $n \geq 1$.

$$\text{D'une part, } \sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^n k.$$

$$\text{D'autre part, } \sum_{k=1}^n \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

La comparaison des deux résultats donne $\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)n}{2}$.

• Pour $q = 2$. Pour $n \geq 2$.

$$\text{D'une part, } \sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2}.$$

$$\text{D'autre part, } \sum_{k=2}^n \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.$$

$$\text{On obtient } \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}.$$

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{k=2}^n k(k-1) = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.}$$

De là,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n k(k-1) &= \sum_{k=1}^n k(k-1) \quad (\text{car pour } k=1, k(k-1)=0) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k, \text{ donc} \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_{k=1}^n k(k-1) + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n-2+3)}{6}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \boxed{\sum_{k=2}^n k^2 = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.}$$

Remarque : La démonstration suppose que $n \geq 2$, sinon la somme pour k variant de 2 à n n'a pas de sens.

On constate cependant que les deux résultats sont encore valables pour $n = 1$.

- Pour $q = 3$. Pour $n \geq 3$.

$$\text{D'une part } \sum_{k=q}^n \binom{k}{q} = \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \sum_{k=3}^n \frac{k(k-1)(k-2)}{6}.$$

$$\text{D'autre part, } \sum_{k=3}^n \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}.$$

$$\text{On obtient } \boxed{\sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2) = \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}.}$$

QUESTION-2

2-a)

On peut prendre pour univers correspondant au premier tirage l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$ muni de la probabilité uniforme. Il est immédiat que $N_1(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et que

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(N_1 = i) = \frac{1}{n} : N_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{\llbracket 1; n \rrbracket}.}$$

Quand on a tiré le jeton numéro i , on effectue des tirages dans une urne contenant $n-1$ jetons. La probabilité de tirer le jeton portant le numéro $j \neq i$ est donc de $\frac{1}{n-1}$.

$$\boxed{\text{Autrement dit } P(N_2 = j / N_1 = i) = \frac{1}{n-1} \text{ pour } j \neq i.}$$