ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2001

Option économique

MATHEMATIQUES II

Vendredi 4 Mai 2001 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le but du problème est l'étude du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires qu'on aborde d'abord de façon générale (partie I), puis dans un cas particulier (partie II).

PARTIE I

On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur un même espace probabilisé et admettant des espérances $E(X)$ et $E(Y)$ et des variances $V(X)$ et $V(Y)$ et on suppose $V(X) > 0$ (on rappelle que $V(X) = 0$ si et seulement si, avec une probabilité égale à 1, X est constante).
La covariance des deux variables aléatoires X et Y (que celles-ci soient discrètes ou à densité) est alors le nombre réel défini par :

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X-E(X))(Y-E(Y))], \text{ ou encore } E(XY)-E(X)E(Y).$$

1°) <u>Covariance des variables aléatoires X et Y</u>

a) Exprimer $\text{Cov}(\lambda X+Y, \lambda X+Y)$ en fonction de $V(\lambda X+Y)$ et en déduire la formule suivante pour tout nombre réel λ :

$$V(\lambda X+Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda\text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

b) En déduire que $(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y)$.
A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité $(\text{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y)$?

2°) Coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

On suppose dans cette question les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de X et Y strictement positives.

a) Exprimer le coefficient de corrélation linéaire ρ des variables aléatoires X et Y en fonction de $\text{Cov}(X, Y)$ et des écarts-types $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ des variables aléatoires X et Y et montrer que ρ appartient à $[-1, +1]$.

Préciser de plus à quelle condition nécessaire et suffisante ρ est égal à -1 ou $+1$.

b) Donner la valeur de ρ lorsque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

c) On suppose enfin que X suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$ et que $Y = X^2$.
Préciser les espérances et les variances de X et Y ainsi que la covariance et le coefficient de corrélation de X et Y. Etudier alors la réciproque de la question 2°(b).

PARTIE II

LES ANNALES

1°) Calculs préliminaires

a) On considère deux nombres entiers naturels q et n tels que $n \geq q$.
En raisonnant par récurrence sur n, établir la formule suivante :

$$\sum_{k=q}^{n} C_k^q = C_{n+1}^{q+1}.$$

b) En faisant $q = 1, 2, 3$, en déduire une expression factorisée des quatre sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k \quad ; \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 \quad ; \quad \sum_{k=3}^{n} k(k-1)(k-2).$$

On considère dans toute la suite de cette partie un nombre entier $n \geq 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n.

On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :

- N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré.
- N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré.
- X la variable aléatoire indiquant le plus petit des numéros des 2 jetons tirés.
- Y la variable aléatoire indiquant le plus grand des numéros des 2 jetons tirés.

On note $E(N_1)$ et $V(N_1)$, $E(N_2)$ et $V(N_2)$, $E(X)$ et $V(X)$, $E(Y)$ et $V(Y)$ les espérances et variances des quatre variables aléatoires N_1, N_2, X, Y.

2°) Lois conjointe et marginales des variables aléatoires N_1 et N_2

a) Déterminer les probabilités $P(N_1 = i)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $P(N_2 = j \,/\, N_1 = i)$ pour $1 \leq j \leq n, j \neq i$.
En déduire $P(N_2 = j)$ pour $1 \leq j \leq n$, puis comparer les lois de N_1 et N_2.

b) Calculer les espérances $E(N_1)$ et $E(N_2)$, les variances $V(N_1)$ et $V(N_2)$.

c) Déterminer les probabilités $P(N_1 = i \cap N_2 = j)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ en distinguant les deux cas $i = j$ et $i \neq j$ et en déduire que :

$$E(N_1 N_2) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}.$$

En déduire la covariance et le coefficient de corrélation linéaire de N_1 et N_2.

d) Exprimer enfin sous forme factorisée la variance $V(N_1 + N_2)$.

3°) Lois conjointe, marginales et conditionnelles des variables aléatoires X et Y

a) Montrer que les probabilités $P(X = i \cap Y = j)$ sont égales à $\dfrac{2}{n(n-1)}$ pour $1 \leq i < j \leq n$.

Que valent-elles sinon?

b) En déduire les probabilités $P(Y=j)$ pour $2 \leq j \leq n$ et $P(X=i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$.
(On vérifiera que les formules donnant $P(Y=j)$ et $P(X=i)$ restent valables si $j=1$ ou $i=n$).

c) Déterminer les probabilités $P(X=i \,/\, Y=j)$ et $P(Y=j \,/\, X=i)$ pour $1 \leq i < j \leq n$, puis reconnaître la loi de X conditionnée par $Y=j$ et la loi de Y conditionnée par $X=i$.

d) Comparer les lois des variables aléatoires $n+1-X$ et Y, autrement dit les deux probabilités $P(n+1-X=j)$ et $P(Y=j)$ pour $2 \leq j \leq n$.
En déduire que $E(n+1-X) = E(Y)$ et $V(n+1-X) = V(Y)$, puis en déduire les expressions de $E(X)$ en fonction de $E(Y)$ et de $V(X)$ en fonction de $V(Y)$.

4°) Espérances et variances des variables aléatoires X et Y

a) Exprimer les espérances $E(Y)$ et $E(X)$ en fonction de n.

b) Exprimer sous forme factorisée $E[(Y(Y-2)]$, puis $E(Y^2)$, $V(Y)$ et $V(X)$ en fonction de n.

5°) Covariance et coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et Y

a) Vérifier que $X+Y=N_1+N_2$, puis en déduire sous forme factorisée la variance de $X+Y$ et la covariance de X et Y.

b) En déduire le coefficient de corrélation de X et Y.
On remarquera que ce coefficient de corrélation linéaire de X et Y est indépendant de n.

6°) Utilisation de la fonction génératrice des variables aléatoires X et Y

On se propose de retrouver les résultats précédents par une autre méthode, en ne supposant connues que les probabilités $P(X=i \cap Y=j)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.
On désigne par G la fonction génératrice du couple de variables aléatoires (X, Y), définie par :

$$G(u,v) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(X=i \cap Y=j)(1+u)^i(1+v)^j .$$

a) Montrer que $\dfrac{\partial G}{\partial u}(0,0) = E(X)$ et $\dfrac{\partial G}{\partial v}(0,0) = E(Y)$.

Donner des égalités analogues pour $\dfrac{\partial^2 G}{\partial u^2}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 G}{\partial v^2}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 G}{\partial u \partial v}(0,0)$.

b) Montrer, en posant $w = u + v + uv$, c'est à dire $1+w=(1+u)(1+v)$, qu'on a pour u, v, $w \neq 0$:

$$G(u,v) = \frac{2(1+w)}{n(n-1)u}\left[\frac{(1+w)^n-1}{w} - \frac{(1+v)^n-1}{v}\right].$$

En développant ci-dessus $(1+w)^n$ et $(1+v)^n$, quelle expression de $G(u, v)$ en déduit-on?

c) Préciser les deux dérivées partielles $\partial w/\partial u$ et $\partial w/\partial v$, puis retrouver sous forme factorisée les nombres $E(X)$, $E(Y)$, $E(X^2)$ et $V(X)$, $E(Y^2)$ et $V(Y)$, $E(XY)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$, et pour terminer le coefficient de corrélation des variables aléatoires X et Y.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

ESSEC MATH II

CORRIGE

La notation $P(A/_B)$ est l'ancienne notation pour $P_B(A)$.

PARTIE–I

QUESTION–1

1–a)

Posons $D(\lambda) = \text{cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y)$. D'une part, $D(\lambda) = V(\lambda X + Y)$.

D'autre part, par définition ,

$$\begin{aligned}
D(\lambda) &= E\Big[\Big((\lambda X + Y) - E(\lambda X + Y)\Big)^2\Big] \\
&= E\Big[\Big(\lambda(X - E(X)) + (Y - E(Y))\Big)^2\Big] \\
&\quad \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= E\Big(\lambda^2(X - E(X))^2 + (Y - E(Y))^2 + 2\lambda(X - E(X))(Y - E(Y))\Big) \\
&= \lambda^2 E\Big((X - E(X))^2\Big) + 2\lambda E\Big((X - E(X))(Y - E(Y))\Big) \\
&\quad + E\Big((Y - E(Y))^2\Big) \qquad \text{par linéarité de l'espérance}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{cov}(\lambda X + Y, \lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda\,\text{cov}(X, Y) + V(Y).}$$

1–b)

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ V(\lambda X + Y) \geq 0$ (c'est une variance). C'est dire que :

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ D(\lambda) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda\,\text{cov}(X, Y) + V(Y) \geq 0$. Comme $V(X) \neq 0$, cette expression est un trinôme en λ. Il est du signe du coefficient de λ^2, donc **il admet au plus une racine réelle.** Son discriminant Δ est négatif ou nul

Or $\Delta = 4\,\text{cov}(X, Y)^2 - 4V(X)V(Y) = 4\Big(\text{cov}(X, Y)^2 - V(X)V(Y)\Big)$.

$$\boxed{\text{cov}(X, Y)^2 - V(X)V(Y) \leq 0, \text{ donc } \text{cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y).}$$

- On a égalité si et seulement si $\Delta = 0$, ce qui veut dire que le trinôme admet une unique racine réelle, λ_0.

Traduisons : il existe un unique réel λ_0 / $V(Y + \lambda_0 X) = 0$. On sait d'après le rappel fait dans l'énoncé que cela signifie que la variable $Y + \lambda_0 X$ est constante avec une probabilité égale à 1. Si nous notons μ_0 cette constante nous pouvons affirmer :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{cov}(X, Y)^2 = V(X)V(Y) \text{ si et seulement s'il existe deux réels } \lambda_0 \text{ et } \mu_0 \\ \text{tels que } P(Y + \lambda_0 X = \mu_0) = 1.\end{array}}$$

QUESTION–2

2–a)

Par définition, $\boxed{\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.}$

Donc $\rho^2(X,Y)=\dfrac{(\mathrm{cov}(X,Y))^2}{V(X)V(Y)}$.

D'après la question 1–b), $(\mathrm{cov}(X,Y))^2\le V(X)V(Y)$. Comme $V(X)>0$ et $V(Y)>0$, l'inégalité précédente équivaut à $0\le\dfrac{(\mathrm{cov}(X,Y))^2}{V(X)V(Y)}\le 1$, soit $0\le\rho^2(X,Y)\le 1$.

$$\boxed{\text{On a donc l'encadrement : } -1\le\rho(X,Y)\le 1.}$$

- $\rho(X,Y)=\pm1\iff\rho^2(X,Y)=1\iff(\mathrm{cov}(X,Y))^2=V(X)V(Y)$. Nous avons déjà traité cette question :

$$\boxed{\rho(X,Y)=\pm1\iff\exists\,(\lambda_0,\mu_0)\in\mathbb{R}^2\ /\ P(X+\lambda_0Y=\mu_0)=1.}$$

2–b)

C'est du cours : **Si les variables X et Y sont indépendantes,** $\mathrm{cov}(X,Y)=0$, **égalité qui équivaut à** $\rho(X,Y)=0$.

ℤ → Rappelons que la réciproque est fausse : la covariance nulle n'implique pas **en général** que les variables sont indépendantes.

2–c)

On sait que $E(X)=0$ et $V(X)=1$. On sait également que l'existence de $V(X)$ implique celle de $E(X^2)$. **Donc $E(Y)$ existe.**

De plus, $E(Y)=E(X^2)=V(X)$, car $E(X)=0$. Donc $\boxed{E(Y)=1.}$

- **Occupons nous de l'espérance de Y^2.**

$E(Y^2)=E(X^4)$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^4\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)}_{h(t)}dt$ converge absolument, mais la fonction que l'on intègre est ici positive.

La fonction h que l'on intégre est continue sur $\mathbb{R}$, **paire** :

l'intégrale $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}h(t)dt$ converge si et seulement si l'intégrale $J=\displaystyle\int_0^{+\infty}h(t)dt$ converge et s'il en est ainsi, $\boxed{I=2J.}$

<u>Calculons J</u>.

Soit $a\in\mathbb{R}_+$. Notons $J(a)=\displaystyle\int_0^a h(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a t^4\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)dt.$

Calculons $J(a)$ et regardons ensuite sa limite quand $a\to+\infty$.

On intègre par parties :

$$u(t)=t^3\quad;\quad u'(t)=3t^2$$
$$v'(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\quad;\quad v(t)=\frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}J(a)&=\Big[-\frac{t^3}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\Big]_0^a+\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a t^2\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)dt\\&=-\frac{a^3}{\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{a^2}{2}\Big)+\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a t^2\exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)dt.\end{aligned}$$

Or

$\lim\limits_{a\to+\infty} a^3\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)=0$ par **croissances comparées** et

$\lim\limits_{a\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a t^2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} t^2\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt=\frac{1}{2}\cdot$

En effet cette dernière intégrale vaut $\frac{1}{2}V(X)$.

Conclusion : $\lim\limits_{a\to+\infty} J(a)=\frac{3}{2}\in\mathbb{R}$. Cela prouve que J existe, donc cela prouve aussi que I existe.

> En résumé : $E(Y^2)=2I=3$. Donc l'espérance de Y^2 existe. La variance de Y est donc
> $$V(Y)=E(Y^2)-\Big(E(Y)\Big)^2=3-1=2.$$

<u>Calculons $\mathrm{cov}(X,Y)$</u>.

$\mathrm{cov}(X,Y)=E(X\times Y)-E(X)\times E(Y)=E(X^3)$ si cette dernière existe, car $Y=X^2$ et $E(X)=0$.

Or $E(X^3)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^3\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ si cette intégrale converge absolument.

La fonction que l'on intègre est continue sur $\mathbb{R}$ et impaire.

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^3\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ converge absolument, donc converge, si et seulement si

l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^3\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ converge.

S'il en est ainsi on a $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^3\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt=0}$

Sur $[1;\infty[$, on a $0\le t^3\le t^4$, donc

$$0\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^3\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^4\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\text{ car }\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\ge0.$$

L'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^4\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ converge puisque l'intégrale

$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^4\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ converge ; donc **par comparaison des fonctions positives**, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^4\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ converge.

La fonction $t\longmapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^3\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$ est continue sur $[0:1]$, donc son intégrale existe et on peut conclure :

> L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^3\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ converge. Donc
> $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^3\exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt$ converge et vaut 0. L'espérance $E(X\times Y)=0$. Nous venons de montrer que
> $$\mathrm{cov}(X,Y)=E(X\times Y)-E(X)E(Y)=0-0=0.$$

Cependant $Y=X^2$, ce qui semble bien vouloir dire que les variables sont liées. Montrons le :

$P(X \geq 2 \cap Y \leq 1) = P(X \geq 2 \cap X^2 \leq 1) = 0$ car $X \geq 2 \Longrightarrow X^2 \geq 4$.

Rappelons que Φ (fonction de répartition de X) est une bijection **strictement croissante** de $]-\infty;+\infty[$ sur $]0;1[$.

$P(X \geq 2) = 1 - \Phi(2) > 0$ car nous savons que $\Phi \in]0;1[$. De même $P(Y \leq 1) = P(-1 \leq X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) > 0$, car la fonction Φ est strictement croissante.

Conclusion $P(X \geq 2 \cap Y \leq 1) \neq P(X \geq 2) \times P(Y \leq 1)$.

> Les variables X et Y sont liées et leur covariance est nulle. Ceci est donc un exemple qui prouve que la réciproque du résultat : " Indépendance implique covariance nulle " est fausse.

PARTIE –II

QUESTION–1

1–a)

Soit H_n la proposition : $\displaystyle\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.

Initialisation : pour $n = q$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \sum_{k=q}^{q} \binom{k}{q} = \binom{q}{q} = 1 = \binom{q+1}{q+1} = \binom{n+1}{q+1}$.

Donc la propriété H_n est satisfaite pour $n = q$.

Hérédité : Supposons qu'il existe un entier $n \geq q$ tel que $\displaystyle\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=q}^{n+1} \binom{k}{q} &= \sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} + \binom{n+1}{q} \\
&= \binom{n+1}{q+1} + \binom{n+1}{q} \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \binom{n+2}{q+1} \quad \text{(d'après la formule de Pascal)}
\end{aligned}$$

La propriété H_{n+1} est donc satisfaite :

D'après le principe du raisonnement par récurrence, H_n est satisfaite pour tous les entiers $n \geq q$.

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ \left(n \geq q \Longrightarrow \sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \binom{n+1}{q+1}\right)}$$

1–b)

- Pour $q = 1$. Remarquons qu'il faut $n \geq 1$.

D'une part, $\displaystyle\sum_{k=q}^{n} \binom{k}{q} = \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k$.

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$.

La comparaison des deux résultats donne $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+1)n}{2}}$.

- Pour $q = 2$. Pour $n \geq 2$.

D'une part, $\displaystyle\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}=\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}$.

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2}=\binom{n+1}{3}=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.

On obtient $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{k(k-1)}{2}=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$.

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k(k-1)=\frac{(n+1)n(n-1)}{3}.}$

De là,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n}k(k-1) &= \sum_{\underline{k=1}}^{n}k(k-1) \quad (\text{car pour } k=1,\ k(k-1)=0)\\
&= \sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k \quad ,\text{donc}\\
\sum_{k=1}^{n}k^2 &= \sum_{k=1}^{n}k(k-1)+\sum_{k=1}^{n}k\\
&= \frac{(n+1)n(n-1)}{3}+\frac{(n+1)n}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2n-2+3)}{6}.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=2}^{n}k^2=\frac{(n+1)n(2n+1)}{6}.}$

Remarque : La démonstration suppose que $n\geq 2$, sinon la somme pour k variant de 2 à n n'a pas de sens.

On constate cependant que les deux résultats sont encore valables pour $n=1$.

- <u>Pour $q=3$</u>. Pour $n\geq 3$.

D'une part $\displaystyle\sum_{k=q}^{n}\binom{k}{q}=\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3}=\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{6}$.

D'autre part, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\binom{k}{3}=\binom{n+1}{4}=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}$.

On obtient $\boxed{\displaystyle\sum_{k=3}^{n}k(k-1)(k-2)=\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}.}$

QUESTION–2

2–a)

On peut prendre pour univers correspondant au premier tirage l'ensemble $[\![1;n]\!]$ muni de la probabilité uniforme. Il est immédiat que $N_1(\Omega)=[\![1;n]\!]$ et que

$$\boxed{\forall i\in[\![1;n]\!],\ P(N_1=i)=\frac{1}{n}\ :\ N_1\hookrightarrow\mathcal{U}_{[\![1;n]\!]}.}$$

Quand on a tiré le jeton numéro i, on effectue des tirages dans une urne contenant $n-1$ jetons. La probabilité de tirer le jeton portant le numéro $j\neq i$ est donc de $\dfrac{1}{n-1}$.

$$\boxed{\text{Autrement dit } P(N_2=j/_{N_1=i})=\frac{1}{n-1}\text{ pour } j\neq i.}$$