



CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS  
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT  
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. - E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Jeudi 10 Mai 2001, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.  
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.  
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.  
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

### EXERCICE I

A. On considère la matrice  $A$  définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et on note  $\varphi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  représenté par  $A$  dans la base canonique.

- a) Montrer que  $A$  admet les valeurs propres 1 et 2 et n'en admet pas d'autre.  
Déterminer les sous-espaces propres  $E_1$  et  $E_2$  associés à ces valeurs propres.  
b) La matrice  $A$  est-elle diagonalisable ?
- Soit  $V$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 1. Trouver un vecteur  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  tel que  $\varphi(W) = V + W$ .
- Soit  $U$  un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre 2. Montrer que la famille  $(U, V, W)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Déterminer la matrice  $B$  représentant l'endomorphisme  $\varphi$  dans la base  $(U, V, W)$  ainsi qu'une matrice inversible  $P$  telle qu'on ait l'égalité  $B = P^{-1}AP$ .



B. Étant données les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on associe à tout élément  $(a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  la matrice  $C_{(a,b,c)}$  définie par :

$$C_{(a,b,c)} = aI + bH + cN$$

On note  $\mathcal{M}$  l'ensemble des matrices  $C_{(a,b,c)}$ , où  $(a, b, c)$  décrit  $\mathbb{R}^3$ .

1. Montrer que  $\mathcal{M}$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $M_3(\mathbb{R})$  des matrices carrées d'ordre 3 et déterminer sa dimension.
2. Vérifier que la matrice  $B$  définie dans la question A.4 appartient à  $\mathcal{M}$ .
3. Préciser les conditions que doivent vérifier les nombres  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que la matrice  $C_{(a,b,c)}$  soit inversible. Déterminer, quand elle existe, sa matrice inverse.
4. Déterminer les valeurs propres de  $C_{(a,b,c)}$ .

Montrer que cette matrice est diagonalisable si et seulement si  $c$  est nul.

\*\*\*\*\*

## EXERCICE II

A. On considère la fonction  $G$  de deux variables réelles définie, pour tout  $x$  et tout  $y$  strictement positifs, par :

$$G(x, y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln x + y - \frac{3}{2}$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction  $G$ .
2. Rechercher les extremums éventuels de la fonction  $G$  dans le domaine  $]0, \infty[ \times ]0, \infty[$ .

B. On considère maintenant la fonction  $f$  définie, pour tout  $x$  strictement positif, par :

$$f(x) = G(x, 1) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

1. Étudier les variations de  $f$ . Montrer que c'est une fonction convexe. Donner sa représentation graphique.
2. a) Calculer une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ .  
b) En déduire que l'intégrale  $\int_0^1 f(x) dx$  existe et calculer sa valeur.



3. Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. On pose :  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right)$ .

a) Établir, pour tout entier  $j$  vérifiant  $1 \leq j < n$ , les inégalités :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

b) En déduire l'encadrement

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$$

c) Montrer les inégalités :

$$0 \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx$$

4. On considère la suite  $(S_n)_{n \geq 2}$  où, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $S_n$  est défini comme dans la question précédente. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel non nul  $n$ , on a l'égalité :  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul  $n$ , la somme  $\sum_{j=1}^n f\left(\frac{j}{n}\right)$  en fonction de  $n$ .

b) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$ .

\*\*\*\*\*

### EXERCICE III

#### A. Préliminaire

Montrer, pour tout entier naturel non nul  $n$ , l'égalité :  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

B. Soit  $N$  un entier supérieur ou égal à 2.

Une urne contient  $N$  boules dont  $N - 2$  sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, successivement et sans remise, les  $N$  boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à  $N$ , on note  $X_1$  la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et  $X_2$  la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Préciser l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$  que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.
2. Soit  $i$  et  $j$  deux entiers de l'intervalle  $[1, N]$ . Montrer que l'on a

$$\mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq N \end{cases}$$



3. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$ . Ces variables sont-elles indépendantes ?
4. a) Montrer que la variable aléatoire  $N + 1 - X_2$  a la même loi que  $X_1$ .  
b) Déterminer la loi de la variable aléatoire  $X_2 - X_1$  et la comparer à la loi de  $X_1$ .
5. À l'aide des résultats de la question 4 :
  - a) Calculer les espérances  $E(X_1)$  et  $E(X_2)$ .
  - b) Montrer l'égalité des variances  $V(X_1)$  et  $V(X_2)$ .
  - c) Établir la relation :  $2\text{Cov}(X_1, X_2) = V(X_1)$ , où  $\text{Cov}(X_1, X_2)$  désigne la covariance des variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$ .
6. Calculer  $V(X_1)$  ; en déduire  $V(X_2)$  et  $\text{Cov}(X_1, X_2)$ .

C. Dans cette partie,  $N$  désigne encore un entier supérieur ou égal à 2.

1. On considère le programme Turbo-Pascal suivant, où  $\text{RANDOM}(10)$  désigne un nombre entier tiré au hasard par l'ordinateur dans l'intervalle  $[0,9]$  (la procédure  $\text{RANDOMIZE}$  sert à initialiser la fonction  $\text{RANDOM}$ ) :

```
PROGRAM Tirage;
VAR
  a,b,c : INTEGER;
BEGIN
  RANDOMIZE;
  a:= RANDOM(10)+1;
  b:= RANDOM(10)+1;
  IF a > b THEN
    BEGIN
      c:=a; a:=b; b:=c;
    END;
  IF a < b WRITELN('(',a,',',b,')');
END.
```

- a) Que fait l'ordinateur dans le cas où les variables  $a$  et  $b$  contiennent toutes les deux le même nombre ?
  - b) Qu'affiche l'ordinateur dans le cas où les variables  $a$  et  $b$  contiennent respectivement les nombres 3 et 5 ?
  - c) Qu'affiche l'ordinateur dans le cas où les variables  $a$  et  $b$  contiennent respectivement les nombres 10 et 1 ?
2. On suppose que  $A$  et  $B$  sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ , indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, N\}$  et on désigne par  $D$  l'événement : "A ne prend pas la même valeur que B".

a) Montrer que la probabilité de l'événement  $D$  est  $\frac{N-1}{N}$ .

b) Soit  $Y_1$  et  $Y_2$  les variables aléatoires définies par : 
$$\begin{cases} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{cases}$$

Calculer, pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, N\}$ , la probabilité conditionnelle  $\mathbf{P}([Y_1 = i, Y_2 = j] / D)$ .

3. Expliquer pourquoi le programme de la question 1 permet de simuler les variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  de la partie B, dans le cas où  $N$  est égal à 10.



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

ESCP-EAP MATH III

CORRIGE

EXERCICE I

PARTIE A

QUESTION-1

1-a)

$\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si  $A - \lambda I$  n'est pas inversible, c'est-à-dire si le système (S), d'inconnues  $(x, y, z)$  n'est pas de Cramer.

$$(S) \quad \begin{cases} -(1 + \lambda)x - y + 2z & = 0 \\ x + (2 - \lambda)y - z & = 0 \\ -2x - y + (3 - \lambda)z & = 0 \end{cases}$$

(S) équivaut à (on permute  $L_1$  et  $L_2$ )

$$\begin{cases} x + (2 - \lambda)y - z & = 0 \\ -(1 + \lambda)x - y + 2z & = 0 \\ -2x - y + (3 - \lambda)z & = 0 \end{cases}$$

puis à (on effectue  $L_2 \leftarrow L_2 + (1 + \lambda)L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ )

$$\begin{cases} x + (2 - \lambda)y - z & = 0 \\ (-\lambda^2 + \lambda + 1)y + (1 - \lambda)z & = 0 \\ (3 - 2\lambda)y + (1 - \lambda)z & = 0 \end{cases}$$

puis à (on échange l'ordre de  $y$  et  $z$ )

$$\begin{cases} x - z + (2 - \lambda)y & = 0 \\ (1 - \lambda)z + (-\lambda^2 + \lambda + 1)y & = 0 \\ (1 - \lambda)z + (3 - 2\lambda)y & = 0 \end{cases}$$

et pour finir à (on effectue  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ )

$$\begin{cases} x - z + (2 - \lambda)y & = 0 \\ (1 - \lambda)z + (-\lambda^2 + \lambda + 1)y & = 0 \\ (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y & = 0 \end{cases}$$

Ce dernier système est triangulaire ; il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un au moins des termes diagonaux est nul.

$\lambda$  est valeur propre de  $A$  si et seulement si  $\lambda = 1$  ou  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , soit  $\lambda = 1$  ou  $\lambda = 2$ .

$$\text{spect}A = \{1, 2\}$$

Recherche des sous-espaces propres.

Si  $\lambda = 1$ , le système (S) équivaut à

$$\begin{cases} x - z + y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Soit } x = z, y = 0.$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = z, y = 0\} \\ &= \{(x, 0, x) / x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 1) / x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$E_1 = \text{vect}((1, 0, 1)). \quad \dim E_1 = 1.$$

Si  $\lambda = 2$ , le système (S) équivaut à

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ -z - y = 0 \end{cases}$$

Soit  $z = x, y = -z = -x$ .

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x, y = -x\} \\ &= \{(x, -x, x) / x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, -1, 1) / x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$E_2 = \text{vect}((1, -1, 1)). \quad \dim E_2 = 1.$$

1-b)

$$\dim E_1 + \dim E_2 = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3. \quad A \text{ n'est pas diagonalisable}$$

### QUESTION-2

Cherchons  $W = (x, y, z)$  tel que  $\varphi(W) = (1, 0, 1) + W = (1, 0, 1) + (x, y, z)$ . Cette égalité vectorielle équivaut à l'égalité matricielle

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Cette égalité matricielle équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} -x - y + 2z = 1 + x \\ x + 2y - z = y \\ -2x - y + 3z = 1 + z \end{cases}$$

soit à

$$\begin{cases} -2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ -2x - y + 2z = 1 \end{cases}$$

puis à

$$\begin{cases} -2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

(puisque les deux dernières lignes sont égales),

puis à (on effectue  $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ )

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

et finalement à

$$\begin{cases} y = 1 \\ x = z - 1. \end{cases}$$

Nous prendrons, par exemple,  $W = (-1, 1, 0)$  correspondant à  $z = 0$ .

**QUESTION-3**

Prenons  $U = (1, -1, 1)$ .

**La famille  $(U, V, W)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si la matrice de ces trois vecteurs dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est inversible.**

Cette matrice est  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Effectuons les opérations suivantes sur les lignes  $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ . On trouve la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C'est une matrice triangulaire, aucun des termes diagonaux n'est nul ; **cette matrice est inversible, donc  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  également.**

Dans ces conditions la matrice  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  est la matrice de passage de la

base canonique de  $\mathbb{R}^3$  à la nouvelle base  $(U, V, W)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

**QUESTION-4**

On sait que  $\varphi(U) = 2U$ ,  $\varphi(V) = V$  et  $\varphi(W) = V + W$ . **Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée**, la matrice de  $\varphi$  dans la base

$(U, V, W)$  est  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

D'après le cours, on sait que  $A$  et  $B$  sont liées par la relation

$$B = P^{-1}AP.$$

**PARTIE B**

**QUESTION-1**

Par définition,  $\mathcal{M}$  est l'ensemble des combinaisons linéaires de  $I, H, N$ .

$\mathcal{M} = \text{vect}(I, H, N)$ , donc  $\mathcal{M}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

La famille  $(I, H, N)$  est une famille génératrice de  $\mathcal{M}$ .

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 / aI + bH + cN = (0)$ . Cette égalité est  $\begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = (0)$ .

Il vient immédiatement  $a = b = c = 0$ .

La famille  $(I, H, N)$  est libre, génératrice de  $\mathcal{M}$  ; c'est une base de  $\mathcal{M}$  :  $\dim \mathcal{M} = 3$ .