CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. - E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Jeudi 10 Mai 2001, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

A. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A dans la base canonique.

1. a) Montrer que A admet les valeurs propres 1 et 2 et n'en admet pas d'autre.

Déterminer les sous-espaces propres E_1 et E_2 associés à ces valeurs propres.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Soit V un vecteur propre de A associé à la valeur propre 1. Trouver un vecteur W de $\mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(W) = V + W$.

3. Soit U un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. Montrer que la famille (U, V, W) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice B représentant l'endomorphisme φ dans la base (U, V, W) ainsi qu'une matrice inversible P telle qu'on ait l'égalité $B = P^{-1}AP$.

B. Étant données les matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on associe à tout élément (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ la matrice $C_{(a,b,c)}$ définie par :

$$C_{(a,b,c)} = a\,I + b\,H + c\,N$$

On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices $C_{(a,b,c)}$, où (a,b,c) décrit $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $M_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 3 et déterminer sa dimension.

2. Vérifier que la matrice B définie dans la question **A.4** appartient à $\mathcal{M}$.

3. Préciser les conditions que doivent vérifier les nombres a, b et c pour que la matrice $C_{(a,b,c)}$ soit inversible. Déterminer, quand elle existe, sa matrice inverse.

4. Déterminer les valeurs propres de $C_{(a,b,c)}$.

Montrer que cette matrice est diagonalisable si et seulement si c est nul.

****

EXERCICE II

A. On considère la fonction G de deux variables réelles définie, pour tout x et tout y strictement positifs, par :

$$G(x,y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln x + y - \frac{3}{2}$$

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction G.

2. Rechercher les extremums éventuels de la fonction G dans le domaine $]0,\infty[\times]0,\infty[$.

B. On considère maintenant la fonction f définie, pour tout x strictement positif, par :

$$f(x) = G(x,1) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

1. Étudier les variations de f. Montrer que c'est une fonction convexe. Donner sa représentation graphique.

2. a) Calculer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

b) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ existe et calculer sa valeur.

LES ANNALES

3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose : $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$.

a) Établir, pour tout entier j vérifiant $1 \leq j < n$, les inégalités :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

b) En déduire l'encadrement

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

c) Montrer les inégalités :

$$0 \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x$$

4. On considère la suite $(S_n)_{n\geq 2}$ où, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, S_n est défini comme dans la question précédente. Montrer que cette suite converge et déterminer sa limite.

5. *On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a l'égalité :* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a) Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la somme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$ en fonction de n.

b) En déduire la limite : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.

****

EXERCICE III

A. Préliminaire

Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

B. Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, successivement et **sans remise**, les N boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

1. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.

2. Soit i et j deux entiers de l'intervalle $[1, N]$. Montrer que l'on a

$$\mathbf{P}(X_1 = i, X_2 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 1 \leq j \leq i \leq N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si} \quad 1 \leq i < j \leq N \end{cases}$$

3. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

4. a) Montrer que la variable aléatoire $N+1-X_2$ a la même loi que X_1.

b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_2 - X_1$ et la comparer à la loi de X_1.

5. À l'aide des résultats de la question **4** :

a) Calculer les espérances $\mathrm{E}(X_1)$ et $\mathrm{E}(X_2)$.

b) Montrer l'égalité des variances $\mathrm{V}(X_1)$ et $\mathrm{V}(X_2)$.

c) Établir la relation : $2\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathrm{V}(X_1)$, où $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables aléatoires X_1 et X_2.

6. Calculer $\mathrm{V}(X_1)$; en déduire $\mathrm{V}(X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

LES ANNALES

C. Dans cette partie, N désigne encore un entier supérieur ou égal à 2.

1. On considère le programme Turbo-Pascal suivant, où `RANDOM(10)` désigne un nombre entier tiré au hasard par l'ordinateur dans l'intervalle [0,9] (la procédure `RANDOMIZE` sert à initialiser la fonction `RANDOM`) :

```
PROGRAM Tirage;
VAR
  a,b,c :  INTEGER;
BEGIN
  RANDOMIZE;
  a:= RANDOM(10)+1;
  b:= RANDOM(10)+1;
    IF a > b THEN
      BEGIN
        c:=a; a:=b; b:=c;
      END;
    IF a < b WRITELN('(',a,',',b,')');
END.
```

a) Que fait l'ordinateur dans le cas où les variables a et b contiennent toutes les deux le même nombre ?

b) Qu'affiche l'ordinateur dans le cas où les variables a et b contiennent respectivement les nombres 3 et 5 ?

c) Qu'affiche l'ordinateur dans le cas où les variables a et b contiennent respectivement les nombres 10 et 1 ?

2. On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ et on désigne par D l'événement : "A ne prend pas la même valeur que B".

a) Montrer que la probabilité de l'événement D est $\dfrac{N-1}{N}$.

b) Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par : $\begin{cases} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{cases}$

Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$, la probabilité conditionnelle $\mathbf{P}([Y_1 = i, Y_2 = j] \ / \ D)$.

3. Expliquer pourquoi le programme de la question 1 permet de simuler les variables aléatoires X_1 et X_2 de la partie **B**, dans le cas où N est égal à 10.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

ESCP-EAP MATH III

CORRIGE

EXERCICE I

PARTIE A

QUESTION–1

1–a)

λ est valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas inversible, c'est-à-dire si le système (S), d'inconnues (x, y, z) n'est pas de Cramer.

(S) $$\begin{cases} -(1+\lambda)x - y + 2z & = 0 \\ x + (2-\lambda)y - z & = 0 \\ -2x - y + (3-\lambda)z & = 0 \end{cases}$$

(S) équivaut à (on permute L_1 et L_2)

$$\begin{cases} x + (2-\lambda)y - z & = 0 \\ -(1+\lambda)x - y + 2z & = 0 \\ -2x - y + (3-\lambda)z & = 0 \end{cases}$$

puis à (on effectue $L_2 \longleftarrow L_2 + (1+\lambda)L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1$)

$$\begin{cases} x + (2-\lambda)y - z & = 0 \\ (-\lambda^2 + \lambda + 1)y + (1-\lambda)z & = 0 \\ (3-2\lambda)y + (1-\lambda)z & = 0 \end{cases}$$

puis à (on échange l'ordre de y et z)

$$\begin{cases} x - z + (2-\lambda)y & = 0 \\ (1-\lambda)z + (-\lambda^2 + \lambda + 1)y & = 0 \\ (1-\lambda)z + (3-2\lambda)y & = 0 \end{cases}$$

et pour finir à (on effectue $L_3 \longleftarrow L_3 - L_2$)

$$\begin{cases} x - z + (2-\lambda)y & = 0 \\ (1-\lambda)z + (-\lambda^2 + \lambda + 1)y & = 0 \\ (\lambda^2 - 3\lambda + 2)y & = 0 \end{cases}$$

Ce dernier système est triangulaire ; il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un au moins des termes diagonaux est nul.

λ est valeur propre de A si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, soit $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

$$\boxed{\mathrm{spect} A = \{1, 2\}}$$

<u>Recherche des sous-espaces propres</u>.

Si $\lambda = 1$, le système **(S)** équivaut à

$$\begin{cases} x - z + y & = 0 \\ \quad\quad y & = 0 \end{cases} \qquad \text{Soit } x = z, y = 0.$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = z, y = 0\} \\ &= \{(x,0,x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,0,1) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\boxed{E_1 = \text{vect}\Big((1,0,1)\Big). \quad \dim E_1 = 1.}$$

Si $\lambda = 2$, le système **(S)** équivaut à

$$\begin{cases} x - z & = 0 \\ -z - y & = 0 \end{cases}$$

Soit $z = x, y = -z = -x$.

$$\begin{aligned} E_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = x, \ y = -x\} \\ &= \{(x,-x,x) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,-1,1) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$\boxed{E_2 = \text{vect}\Big((1,-1,1)\Big). \quad \dim E_2 = 1.}$$

1–b)

$$\boxed{\dim E_1 + \dim E_2 = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3. \ A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

QUESTION–2

Cherchons $W = (x,y,z)$ tel que $\varphi(W) = (1,0,1) + W = (1,0,1) + (x,y,z)$. Cette égalité vectorielle équivaut à l'égalité matricielle

$$A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Cette égalité matricielle équivaut au système suivant :

$$\begin{cases} -x - y + 2z & = 1 + x \\ x + 2y - z & = y \\ -2x - y + 3z & = 1 + z \end{cases}$$

soit à

$$\begin{cases} -2x - y + 2z & = 1 \\ x + y - z & = 0 \\ -2x - y + 2z & = 1 \end{cases}$$

puis à

$$\begin{cases} -2x - y + 2z & = 1 \\ x + y - z & = 0 \end{cases}$$

(puisque les deux dernières lignes sont égales),

puis à (on effectue $L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_2$)

$$\begin{cases} \quad\quad y & = 1 \\ x + y - z & = 0 \end{cases}$$

et finalement à

$$\begin{cases} y & = 1 \\ x & = z - 1. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Nous prendrons, par exemple, } W = (-1,1,0) \text{ correspondant à } z = 0.}$$

QUESTION–3

Prenons $U = (1, -1, 1)$.

La famille (U, V, W) est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si la matrice de ces trois vecteurs dans la base caononique de $\mathbb{R}^3$ est inversible.

Cette matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Effectuons les opérations suivantes sur les lignes $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$. On trouve la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C'est une matrice triangulaire, aucun des termes diagonaux n'est nul ; **cette matrice est inversible, donc** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **également**.

Dans ces conditions la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\boxed{\text{la nouvelle base } (U, V, W) \text{ de } \mathbb{R}^3.}$

QUESTION–4

On sait que $\varphi(U) = 2U$, $\varphi(V) = V$ et $\varphi(W) = V + W$. **Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée**, la matrice de φ dans la base (U, V, W) est $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après le cours, on sait que A et B sont liées par la relation

$$\boxed{B = P^{-1}AP.}$$

PARTIE B

QUESTION–1

Par définition, $\mathcal{M}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de I, H, N.

$$\boxed{\mathcal{M} = \text{vect}(I, H, N), \text{ donc } \mathcal{M} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$$

La famille (I, H, N) est une famille génératrice de $\mathcal{M}$.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ / $aI + bH + cN = (0)$. Cette égalité est $\begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = (0)$.

Il vient immédiatement $a = b = c = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (I, H, N) \text{ est libre, génératrice de } \mathcal{M} \text{ ; c'est une base de } \mathcal{M} : \dim \mathcal{M} = 3.}$$