



edhec

School of Management

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD
Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES Option économique

Mardi 15 mai 2001, de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

E désigne un espace vectoriel sur \mathbb{R} , rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

On désigne par a un réel non nul et on considère l'endomorphisme f_a de E , défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \text{ et } f_a(e_1) = f_a(e_3) = a e_1 + e_2 - a e_3.$$

- 1) a. Écrire la matrice A_a de f_a relativement à la base \mathcal{B} et calculer A_a^2 .
b. Montrer que 0 est la seule valeur propre de A_a .
c. A_a est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
- 2) On pose $u_1 = a e_1 + e_2 - a e_3$.
a. Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ est une base de E .

- b. Vérifier que la matrice de f_a relativement à la base \mathcal{B}' est $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = f_a$.

- 3) On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans \mathcal{B}' .
a. Expliquer pourquoi $M^2 = K$ puis montrer que $MK = KM$.
b. Dédire de ces deux relations que $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x, y et z étant 3 réels tels que $xz = 1$.
- 4) Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme g dont la matrice dans \mathcal{B}' est du type ci-dessus est solution de $g \circ g = f_a$.



Exercice 2

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1, R_2 et R_3 de probabilités respectives P_1, P_2 et P_3 . On a donc $P_1 + P_2 + P_3 = 1$ et on admet que, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, $0 < P_i < 1$.

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus.

Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue de ces n épreuves et qui vaut 0 sinon.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

- 1) a. Justifier soigneusement que $X = X_1 + X_2 + X_3$.
- b. Donner la loi de X_i pour tout i de $\{1, 2, 3\}$.
- c. En déduire l'espérance de X , notée $E(X)$.

La suite de cet exercice consiste à rechercher les valeurs des réels P_i en lesquelles $E(X)$ admet un minimum local. Pour ce faire, on note f la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ de \mathbb{R}^2 par : $f(x, y) = (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n$.

- 2) a. On pose $P_1 = x$ et $P_2 = y$. Vérifier que $E(X) = f(x, y)$.
- b. Montrer que f est une fonction de classe C^2 sur $]0, 1[\times]0, 1[$.
- 3) a. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
- b. En déduire que le seul point en lesquels les dérivées partielles d'ordre 1 de f s'annulent simultanément est le point $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
- 4) a. Démontrer que f présente un minimum local au point $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.
- b. Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0. \\ f(x) = x e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- 1) Vérifier que f est une densité de probabilité.

La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont une densité est f .

- 2) a. Déterminer la fonction de répartition F de X .
- b. Calculer la médiane de X , c'est-à-dire le réel μ tel que $P(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$.
- 3) On appelle mode de la variable aléatoire X tout réel x en lequel f atteint son maximum. Montrer que X a un seul mode, noté M_o , et le déterminer.
- 4) a. En utilisant un résultat connu concernant la loi normale, établir que X a une espérance et montrer que $E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
- b. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la variance de X .



Problème

Partie 1

On pose, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$.

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n \leq \ln(n) + 1$.

Partie 2

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et par la relation suivante, valable pour tout n de \mathbb{N} : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

- 1) a. Montrer par récurrence que chaque terme de cette suite est parfaitement défini et strictement positif.
b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
- 2) a. Pour tout k de \mathbb{N} , exprimer $u_{k+1}^2 - u_k^2$ en fonction de u_k^2 .
b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 = 2n + 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2}$.
c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n^2 \geq 2n + 1$. En déduire la limite de la suite (u_n) .
- 3) a. À l'aide du résultat précédent, montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$$u_n^2 \leq 2n + 2 + \frac{1}{2} v_{n-1}$$

b. En utilisant la partie 1, établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 :
$$u_n^2 \leq 2n + \frac{5}{2} + \frac{\ln(n-1)}{2}$$

c. En déduire finalement que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2n}$.

Partie 3

- 1) Écrire un programme en Turbo Pascal permettant de calculer et d'afficher u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n au clavier.
- 2) a. Écrire un deuxième programme, toujours en Turbo Pascal, qui permette de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geq 100$.
b. On donne : $\ln 2 \leq 0,70$ et $\ln 5 \leq 1,61$. En déduire un majorant de $\ln 5000$.
c. Montrer que l'entier n trouvé en 2a) est compris entre 4995 et 5000.



ANNALES DE MATHEMATIQUES 2001

EDHEC

CORRIGE

EXERCICE-I

QUESTION-1

1-a)

Par définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée,

$$E_a = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}.$$

Un calcul sans la moindre difficulté donne $A_a^2 = (0)$.

1-b)

Première façon de répondre : Si λ est valeur propre de A_a , alors il existe une matrice colonne $X \neq (0)$ telle que $A_a X = \lambda X$. En multipliant à gauche les deux membres par A_a on obtient : $A_a^2 X = A_a(\lambda X) = \lambda A_a X = \lambda^2 X$. Or $A_a^2 = (0)$, donc $A_a^2 X = (0)$; l'égalité précédente devient $\lambda^2 X = (0)$. Or $X \neq (0)$, donc $\lambda^2 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 0$.

0 est la seule valeur propre possible.

Or $A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (0)$ (ceci vient du fait que la deuxième colonne de A_a est nulle). Donc

0 est **effectivement** valeur propre.

La matrice A_a admet 0 pour unique valeur propre.

Deuxième façon de répondre : On peut aussi dire : le polynôme X^2 est un polynôme annulateur de A . Et le cours nous apprend que les seules valeurs possibles de A sont les racines de ce polynôme, et on retrouve, bien-sûr, le même résultat.

1-c)

Raisonnons par l'absurde : si A_a est diagonalisable, elle est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0)$. Il existe donc une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, telle que $A = P(0)P^{-1} = (0)$. **Ce qui est faux.**

Conclusion : la matrice A_a n'est pas diagonalisable.

D'après le cours, on sait que A_a admet 0 comme valeur propre équivalent à A_a non inversible, tout simplement parce qu'alors $\text{Ker}(A - 0I) = \text{Ker } A \neq \{0\}$.

La matrice A_a n'est pas inversible.

QUESTION-2

2-a)

La matrice des coordonnées des vecteurs u_1, e_2, e_3 dans la base (e_1, e_2, e_3) de E est **par**

définition $Q = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice triangulaire dont **aucun des termes diagonaux n'est nul** ; la matrice Q est inversible.

Q inversible équivaut à (u_1, e_2, e_3) est une base de E .

2-b)

Remarquons que $f_a(e_1) = (-a, 0, a) = u_1$. Donc $f_a(u_1) = f_a(f_a(e_1)) = f_a^2(e_1) = 0$ car f_a^2 est l'endomorphisme nul (sa matrice A_a^2 est nulle).

$f_a(e_2) = 0$ et $f_a(e_3) = u_1$. Par **définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base**, la matrice de f_a dans la base \mathcal{B}' est

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

QUESTION-3

3-a)

Soit g un endomorphisme de \mathbb{R}^2 associé à M dans la base \mathcal{B}' ; alors M^2 est la matrice de $g^2 = f$, c'est dire que $M^2 = K$.

Si M est la matrice de g dans la base \mathcal{B}' , alors M^2 est la matrice de $g^2 = f$. Alors

$$MK = MM^2 = M^2M = KM.$$

$$MK = KM.$$

3-b)

Cherchons $M = \begin{pmatrix} m & x & y \\ n & q & z \\ p & r & s \end{pmatrix}$

$$MK = \begin{pmatrix} m & x & y \\ n & q & z \\ p & r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

$$KM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & x & y \\ n & q & z \\ p & r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & r & s \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'égalité $MK = KM$ équivaut au système $\begin{cases} m = s \\ p = r = n = 0. \end{cases}$

Donc $M = \begin{pmatrix} m & x & y \\ 0 & q & z \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$

Réolvons maintenant l'équation $M^2 = K$, c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} m & x & y \\ 0 & q & z \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & x & y \\ 0 & q & z \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m^2 & x(m+q) & 2my+xz \\ 0 & q^2 & z(m+q) \\ 0 & 0 & m^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\begin{cases} m^2 = 0 \\ q^2 = 0 \\ x(m+q) = 0 \\ z(m+q) = 0 \\ 2my+xz = 1 \end{cases} ; \begin{cases} m=q = 0 \\ xz = 1. \end{cases}$$

Si g existe, sa matrice dans la base \mathcal{B}' est

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } xz = 1, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

QUESTION-4

Soit g un endomorphisme dont la matrice dans la base \mathcal{B}' est une matrice M donnée

par la formule (1). Alors $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$ puisque $xz = 1$.

Conclusion : un endomorphisme g de E vérifie la relation $g \circ g = f_a$ si et seulement si dans la base \mathcal{B}' sa matrice est du type M où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $xz = 1$.

EXERCICE-II

QUESTION-1

1-a)

Si $n = 2$.

. Un seul résultat peut être apparu : $X = 2$; l'une des trois variables X_i est nulle, les deux autres X_j et X_k valent 1. Donc $\sum_{r=1}^3 X_r = 2$. **C'est bien la valeur prise par X .**

. Deux résultats peuvent être apparus : $X = 1$; deux des trois variables valent zéro, l'autre vaut 1 ; la somme vaut alors 1 **et c'est bien la valeur de X .**

Si $n \geq 3$.

. Les deux cas précédents peuvent se produire. On peut voir apparaître à l'issue des trois épreuves les trois résultats ; dans ce cas $X = 0$ et $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, donc la somme $\sum_{r=1}^3 X_r = 0 = X$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}, X = X_1 + X_2 + X_3.$$