EMLYON

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Mardi 2 mai 2000 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ de matrice J dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On considère, pour tout nombre réel a, la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.

b. Montrer que J est diagonalisable. Déterminer une matrice réelle diagonale D d'ordre trois et une matrice réelle inversible P d'ordre trois telles que $J = PDP^{-1}$.

c. En déduire que, pour tout nombre réel a, il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.

d. Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?

2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice X carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.

a. Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$.

α) Montrer que X commute avec M_a, puis que X commute avec J.

β) On note h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice X dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de f est vecteur propre de h.

γ) Etablir qu'il existe une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer : $\Delta^2 = D_a$.

δ) En déduire : $a \geqslant 2$.

b. Réciproquement, montrer que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2, il existe une matrice carrée réelle X d'ordre trois telle que $X^2 = M_a$.

c. Conclure.

Exercice 2

On considère la fonction $f\ :\ ]-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-1;+\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[. \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue sur $]-1;+\infty[$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
Pour tout réel x de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$.

c. Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

d. En déduire que f est de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$.

2. Montrer : $\forall x \in]-1;+\infty[,\quad \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leqslant 0$.
En déduire les variations de f. On précisera les limites de f en -1 et $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]-\dfrac{1}{2};\ +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$ existe.

4. On considère la fonction $F\ :\ ]-\dfrac{1}{2};+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-\dfrac{1}{2};\ +\infty[$, par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt.$$

a. Montrer que F est dérivable sur $]-\dfrac{1}{2};+\infty[$ et que F est croissante.

b. Montrer : $\forall x \in]0;+\infty[,\quad F(x) \geqslant x f(2x)$.

c. En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

d. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt$ est convergente.

En déduire que la fonction F admet une limite finie en $-\dfrac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

LES ANNALES

Exercice 3

Soit a un entier strictement positif.

On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants :

I. Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n-1\}, \quad P(X = k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$.

2. Montrer : $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.

On rappelle que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.
Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

II. Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.
Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.

2. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.

3. Montrer : $E(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n-1)}$.

III. Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).
Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2000

EM-LYON : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

1–a)

λ est valeur propre de J si et seulement si la matrice $J-\lambda I$ n'est pas inversible.

$$J-\lambda I=\begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 1\\ 0 & -1-\lambda & 2\\ 0 & 1 & -\lambda\end{pmatrix} \qquad \text{on effectue } L_2 \longleftrightarrow L_3$$

$$J-\lambda I \text{ est équivalente à } \begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & -1-\lambda & 2\end{pmatrix} \qquad L_3 \longleftarrow L_3+(\lambda+1)L_2.$$

$$J-\lambda I \text{ est équivalente à } \begin{pmatrix}-\lambda & 2 & 1\\ 0 & 1 & -\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda+2\end{pmatrix}.$$

La matrice $J-\lambda I$ est triangulaire : elle n'est pas inversible si et seulement si l'un au moins des pivots est nul, donc si et seulement si

$$\lambda=-2 \text{ ou } \lambda=0 \text{ ou } \lambda=1.$$

Notons E_λ le sous-espace propre de f associé à λ.

$$u=(x,y,z)\in E_\lambda \iff \begin{cases}-\lambda x+2y+z & =0\\ y-\lambda z & =0\\ (-\lambda^2-\lambda+2)z & =0.\end{cases}$$

- **Pour $\lambda=-2$, cela donne** :

$$\begin{cases}2x+2y+z & =0\\ y+2z & =0\end{cases} \iff \begin{cases}y & =-2z\\ 2x & =3z\\ z & \in\mathbb{R}.\end{cases}$$

$$\boxed{E_{-2}=\text{vect}\Big((3,-4,2)\Big)\ ;\ u_1=(3,-4,2).}$$

- **Pour $\lambda=0$, cela donne** :

$$\begin{cases}2y+z & =0\\ y & =0\end{cases} \iff \begin{cases}y & =0\\ z & =0\\ x & \in\mathbb{R}.\end{cases}$$

$$\boxed{E_0=\text{vect}\Big((1,0,0)\Big)\ ;\ u_2=(1,0,0).}$$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

Remarque : Il était prévisible que $(1,0,0)$ soit dans le noyau de f car, d'après la première colonne de la matrice J de f, $f(1,0,0) = (0,0,0)$.

- **Pour $\lambda = 1$, cela donne** :

$$\begin{cases} -x+2y+z &= 0 \\ y-z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y &= z \\ x &= 3z \\ z &\in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$\boxed{E_1 = \text{vect}\Big((3,1,1)\Big) \ ; \ \ u_3 = (3,1,1).}$$

1–b)

La matrice $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle admet trois valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors d'après la formule de changement de base pour les matrices, on obtient :

$$\boxed{J = PDP^{-1}}$$

1–c)

$M_a = aI + J \iff P^{-1}M_aP = P^{-1}(aI+J)P$ (**car P et P^{-1} sont inversibles : sinon il n'y aurait que l'implication de gauche à droite**)

$M_a = aI + J \iff P^{-1}M_aP = aI + D.$

Si l'on pose $D_a = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, on obtient $P^{-1}M_aP = D_a$; donc en multipliant cette égalité à gauche par P et à droite par P^{-1} l'on obtient :

$$\boxed{M_a = PD_aP^{-1}.}$$

1–d)

On sait qu'**une matrice carrée n'est pas inversible si et seulement si elle admet 0 pour valeur propre. Donc une matrice carrée est inversible si et seulement si elle n' admet pas 0 pour valeur propre.** Or les valeurs propres de M_a sont $a-2$, $1+a$, a. Il en résulte que M_a est inversible si et seulement si $a-2 \neq 0$, $1+a \neq 1$, $a \neq 0$.

$$\boxed{M_a \text{ est inversible si et seulement si } a \notin \{-1, 2, 0\}.}$$

QUESTION–2

2–a)

α) $M_a = X^2 \Longrightarrow XM_a = X^3 = X^2X = M_aX$. Donc M_a et X commutent. Or $J = M_a - aI$, X commute avec M_a et avec I (I commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), on conclut que X et J commutent.

$$\boxed{XJ = JX.}$$

β) Nous avons noté λ les valeurs propres de f, donc de J. Considérons une valeur propre λ de f et soit u un vecteur propre de f associé à λ.

On a $f(u) = \lambda u$ et $u \neq (0,0,0)$.