



Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Mardi 2 mai 2000 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On considère la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 de matrice J dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On considère, pour tout nombre réel a , la matrice carrée réelle d'ordre trois :

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

1. a. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f .
- b. Montrer que J est diagonalisable. Déterminer une matrice réelle diagonale D d'ordre trois et une matrice réelle inversible P d'ordre trois telles que $J = PDP^{-1}$.
- c. En déduire que, pour tout nombre réel a , il existe une matrice réelle diagonale D_a d'ordre trois, que l'on calculera, telle que $M_a = PD_aP^{-1}$.
- d. Quel est l'ensemble des nombres réels a tels que M_a soit inversible ?

2. On se propose, dans cette question, de déterminer l'ensemble des nombres réels a tels qu'il existe une matrice X carrée réelle d'ordre trois vérifiant $X^2 = M_a$.
- a. Soient a un nombre réel et X une matrice carrée réelle d'ordre trois tels que $X^2 = M_a$.
- α) Montrer que X commute avec M_a , puis que X commute avec J .
- β) On note h l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice X dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
Déduire de la question précédente que tout vecteur propre de f est vecteur propre de h .
- γ) Etablir qu'il existe une matrice réelle diagonale Δ d'ordre trois telle que $X = P\Delta P^{-1}$ et montrer : $\Delta^2 = D_a$.
- δ) En déduire : $a \geq 2$.
- b. Réciproquement, montrer que, pour tout nombre réel a supérieur ou égal à 2, il existe une matrice carrée réelle X d'ordre trois telle que $X^2 = M_a$.
- c. Conclure.

Exercice 2

On considère la fonction $f :]-1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-1; +\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[. \end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue sur $]-1; +\infty[$.
- b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.
Pour tout réel x de $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.
- c. Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\frac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.
- d. En déduire que f est de classe C^1 sur $]-1; +\infty[$.
2. Montrer : $\forall x \in]-1; +\infty[, \frac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leq 0$.
En déduire les variations de f . On précisera les limites de f en -1 et $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{2x} f(t) dt$ existe.
4. On considère la fonction $F :]-\frac{1}{2}; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout x de $]-\frac{1}{2}; +\infty[$, par :

$$F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt.$$

- a. Montrer que F est dérivable sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$ et que F est croissante.
- b. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, F(x) \geq xf(2x)$.
- c. En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
- d. Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t) dt$ est convergente.
En déduire que la fonction F admet une limite finie en $-\frac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

Exercice 3

Soit a un entier strictement positif.

On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants :

I. Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge.

On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

1. Montrer : $\forall k \in \{1, \dots, 2n - 1\}, P(X = k) = \frac{2n - k}{n(2n - 1)}$.

2. Montrer : $E(X) = \frac{2n + 1}{3}$.

On rappelle que pour tout entier naturel $p \geq 1$, on a : $\sum_{k=1}^p k^2 = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$.

3. Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$.

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1 .

II. Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignées sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur paie un franc chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a francs lorsqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{\text{ième}}$ carte découverte ($k \leq n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. Pour tout entier $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.

2. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \frac{n - 1}{2(2n - 1)}$.

3. Montrer : $E(G_2) = \frac{3(3n - 1)a - (7n^2 - 1)}{6(2n - 1)}$.

III. Comparaison des deux protocoles

On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$).

Déterminer, selon les valeurs de a , le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.



ANNALES DE MATHÉMATIQUES 2000

EM-LYON : MATH III

CORRIGE

EXERCICE-I

QUESTION-1

1-a)

λ est valeur propre de J si et seulement si la matrice $J - \lambda I$ n'est pas inversible.

$$J - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \text{on effectue } L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$J - \lambda I \text{ est équivalente à } \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & -1 - \lambda & 2 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + (\lambda + 1)L_2.$$

$$J - \lambda I \text{ est équivalente à } \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2 - \lambda + 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $J - \lambda I$ est triangulaire : elle n'est pas inversible si et seulement si l'un au moins des pivots est nul, donc si et seulement si

$$\lambda = -2 \text{ ou } \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1.$$

Notons E_λ le sous-espace propre de f associé à λ .

$$u = (x, y, z) \in E_\lambda \iff \begin{cases} -\lambda x + 2y + z = 0 \\ y - \lambda z = 0 \\ (-\lambda^2 - \lambda + 2)z = 0. \end{cases}$$

• Pour $\lambda = -2$, cela donne :

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2z \\ 2x = 3z \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$E_{-2} = \text{vect} \left((3, -4, 2) \right) ; u_1 = (3, -4, 2).$$

• Pour $\lambda = 0$, cela donne :

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$E_0 = \text{vect} \left((1, 0, 0) \right) ; u_2 = (1, 0, 0).$$

Remarque : Il était prévisible que $(1,0,0)$ soit dans le noyau de f car, d'après la première colonne de la matrice J de f , $f(1,0,0) = (0,0,0)$.

• Pour $\lambda = 1$, cela donne :

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = z \\ x = 3z \\ z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$E_1 = \text{vect} \left((3, 1, 1) \right) ; u_3 = (3, 1, 1).$$

1-b)

La matrice $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle admet trois valeurs propres distinctes, donc elle est diagonalisable.

Si l'on pose $P = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors d'après la formule de changement de base pour les matrices, on obtient :

$$J = PDP^{-1}$$

1-c)

$M_a = aI + J \iff P^{-1}M_aP = P^{-1}(aI + J)P$ (car P et P^{-1} sont inversibles : sinon il n'y aurait que l'implication de gauche à droite)

$$M_a = aI + J \iff P^{-1}M_aP = aI + D.$$

Si l'on pose $D_a = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, on obtient $P^{-1}M_aP = D_a$; donc en multipliant cette égalité à gauche par P et à droite par P^{-1} l'on obtient :

$$M_a = PD_aP^{-1}.$$

1-d)

On sait qu'une matrice carrée n'est pas inversible si et seulement si elle admet 0 pour valeur propre. Donc une matrice carrée est inversible si et seulement si elle n'admet pas 0 pour valeur propre. Or les valeurs propres de M_a sont $a-2$, $1+a$, a . Il en résulte que M_a est inversible si et seulement si $a-2 \neq 0$, $1+a \neq 0$, $a \neq 0$.

$$M_a \text{ est inversible si et seulement si } a \notin \{-1, 2, 0\}.$$

QUESTION-2

2-a)

$\alpha)$ $M_a = X^2 \implies XM_a = X^3 = X^2X = M_aX$. Donc M_a et X commutent. Or $J = M_a - aI$, X commute avec M_a et avec I (I commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$), on conclut que X et J commutent.

$$XJ = JX.$$

$\beta)$ Nous avons noté λ les valeurs propres de f , donc de J . Considérons une valeur propre λ de f et soit u un vecteur propre de f associé à λ .

$$\text{On } af(u) = \lambda u \text{ et } u \neq (0,0,0).$$