CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Jeudi 18 Mai 2000, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

LES ANNALES

EXERCICE I

1. Montrer que, pour tout nombre réel $x > 0$ et tout nombre entier naturel k, l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{t^k e^{-xt}}{1+t^5}\,\mathrm{d}t$$

est convergente.
Pour quelles valeurs de l'entier k cette intégrale est-elle aussi convergente pour $x = 0$?

2. On se propose d'étudier la fonction F définie, pour $x \geq 0$, par $F(x) = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^5}\,\mathrm{d}t$.
Montrer que la fonction F est une fonction strictement positive, décroissante et que

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 0$$

3. a) Montrer que, pour tout réel $t \geq 0$, tout réel x et tout réel $h \geq 0$, on a

$$\left| e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\,h\,e^{-tx} \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2}\, e^{-tx}$$

b) Montrer de même que, pour tout réel $t \geq 0$, tout réel x et tout réel $h \leq 0$, on a

$$\left| e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + t\,h\,e^{-tx} \right| \leq \frac{t^2 h^2}{2}\, e^{-t(x+h)}$$

c) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$ et tout réel h tel que $x + h \geq 0$, on a

$$\left| F(x+h) - F(x) + h \int_1^{\infty} \frac{t\,e^{-xt}}{1+t^5}\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{h^2}{2} \int_1^{\infty} \frac{t^2}{1+t^5}\,\mathrm{d}t$$

d) Montrer enfin que la fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et donner une expression de sa fonction dérivée F'.

4. Montrer de même que F' est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $F''(x) = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{t^2\,e^{-xt}}{1+t^5}\,\mathrm{d}t$.

5. On se propose de montrer que la fonction $\ln(F)$ est convexe.
a) Montrer que si a, b et c sont trois nombres réels tels que, pour tout nombre réel λ, on ait l'inégalité : $a\lambda^2 + 2b\lambda + c \geq 0$, alors, nécessairement, $ac - b^2 \geq 0$.
b) En déduire que la fonction $\ln(F)$ est une fonction convexe.

EXERCICE II

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettres a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante :

- si la lettre a est tirée, on change le jeton A de case,
- si la lettre b est tirée, on change le jeton B de case,
- si la lettre c est tirée, on ne change pas le placement des jetons.

On suppose qu'il existe un espace probabilisé dont la probabilité est notée $\mathbf{P}$, qui modélise cette expérience et que l'on définit deux suites de variables aléatoires sur cet espace, $(X_n)_{n\geq 0}$ et $(Y_n)_{n\geq 0}$, décrivant les positions respectives des jetons A et B, en posant :
$X_0 = Y_0 = 0$, et pour tout entier naturel n non nul, $X_n = 0$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, le jeton A se trouve dans C_0 et $X_n = 1$ s'il se trouve dans C_1; de même, $Y_n = 0$ si le jeton B est dans C_0 à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération et $Y_n = 1$ s'il se trouve dans C_1.

I. Simulation

Écrire un programme en Turbo-Pascal permettant de simuler l'expérience, qui lira un entier N entré au clavier, représentant le nombre de tirages à effectuer, et qui affichera à l'écran la liste des couples observés (X_n, Y_n) pour $1 \leq n \leq N$.
Ce programme utilisera la fonction `RANDOM` qui renvoie, pour un argument m de type `INTEGER`, un nombre entier de l'intervalle $[0, m-1]$, tiré au hasard et de manière équiprobable.
(Cette fonction doit être initialisée par la commande `RANDOMIZE`).

II. Étude du mouvement du jeton A

1. a) Soit n un entier strictement positif. Déterminer la probabilité que, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, le jeton A n'ait jamais quitté C_0.

b) Quelle est la probabilité que le jeton A reste indéfiniment dans C_0 ?

2. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on s'intéresse à l'événement D_k : à l'issue de la $k^{\text{ième}}$ opération, le jeton A revient pour la première fois dans C_0. Déterminer la probabilité $\mathbf{P}(D_k)$.

3. Soit M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de M et donner une base de vecteurs propres.

b) En déduire l'expression de M^n, pour tout entier n strictement positif.

4. a) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X_1 = 0)$ et $\mathbf{P}(X_1 = 1)$.

b) Déterminer une matrice Q telle que, pour tout entier naturel n, on ait l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_{n+1} = 0) \\ \mathbf{P}(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \mathbf{P}(X_n = 0) \\ \mathbf{P}(X_n = 1) \end{pmatrix}$$

c) Pour tout entier naturel n non nul, calculer la matrice Q^n et en déduire la loi de la variable X_n.

III. Étude du mouvement du couple de jetons (A, B)

On suppose que l'on définit sur le même espace probabilisé une suite de variables aléatoires $(W_n)_{n\geq 0}$, à valeurs dans $\{0, 1, 2, 3\}$, décrivant les positions des deux jetons A et B, en posant :

$W_0 = 0$, et pour tout entier naturel n non nul,

$W_n = 0$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A et B se trouvent tous les deux dans C_0,

$W_n = 1$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A se trouve C_0 et B dans C_1,

$W_n = 2$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, A se trouve C_1 et B dans C_0,

$W_n = 3$ si, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, les deux jetons A et B se trouvent dans C_1.

1. Calculer les probabilités $\mathbf{P}(W_1 = i)$ pour i égal à $0, 1, 2$ et 3.
2. Déterminer la matrice R telle que, pour tout entier naturel n, on ait l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}(W_{n+1} = 0) \\ \mathbf{P}(W_{n+1} = 1) \\ \mathbf{P}(W_{n+1} = 2) \\ \mathbf{P}(W_{n+1} = 3) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \mathbf{P}(W_n = 0) \\ \mathbf{P}(W_n = 1) \\ \mathbf{P}(W_n = 2) \\ \mathbf{P}(W_n = 3) \end{pmatrix}$$

3. On considère les matrices :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Pour tout entier naturel n non nul, calculer les matrices U^n et V^n.

   b) Établir, pour tout entier naturel non nul, l'égalité

$$(U - V)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \mathrm{C}_n^k \, U^{n-k} V^k$$

   où, par convention, on pose : $U^0 = V^0 = I$.

   c) En déduire, pour tout entier naturel non nul, l'égalité

$$(U - V)^n = \frac{1}{4}[3^n - (-1)^n]U + (-1)^n V^n$$

4. Pour tout entier naturel n non nul, calculer la matrice R^n et donner la loi de la variable W_n. (On distinguera les cas n pair et n impair).
5. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la covariance de X_n et Y_n et calculer la limite de cette covariance quand n tend vers $+\infty$.

IV. Étude d'un temps de séjour

On suppose que chaque tirage, avec l'opération qui le suit, dure une minute. Ainsi, à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, n minutes se sont écoulées depuis le début de l'expérience.

Soit n un entier naturel non nul.

On suppose que le nombre de minutes écoulées pendant lesquelles le jeton A a séjourné dans C_1, entre le début de l'expérience et l'issue de la $n^{\text{ième}}$ opération, est une variable aléatoire que l'on note T_n.

1. Exprimer T_n à l'aide des variables X_k, pour k compris entre 1 et n.
2. En déduire l'espérance $\mathbf{E}(T_n)$.

   Calculer la limite de $\dfrac{1}{n}\mathbf{E}(T_n)$ quand n tend vers l'infini.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2000

HEC : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–I

QUESTION–1

La fonction f_k définie par : $t \longmapsto \dfrac{t^k e^{-xt}}{1+t^5}$ est continue sur $[1;+\infty[$, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

L'intégrale est donc impropre en $+\infty$.

Cette fonction est positive sur l'intervalle $[1;+\infty[$. Nous allons chercher un équivalent en $+\infty$.

$(1+t^5) \underset{+\infty}{\sim} t^5$, donc $f_k(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^k e^{-xt}}{t^5} = t^{k-5}e^{-xt} = \dfrac{t^{k-5}}{e^{xt}} = \dfrac{t^{k-5}}{(e^t)^x}$.

Comme $x > 0$, nous savons **d'après les croissances comparées** que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{t^2 t^{k-5}}{(e^t)^x} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{k-3}}{(e^t)^x} = 0$.

Cela veut dire que $\displaystyle\lim_{+\infty} t^2 f_k(t) = 0$ $\left(\text{car } f_k(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^{k-5}}{(e^t)^x} \Longrightarrow t^2 f_k(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{t^{k-3}}{(e^t)^x}\right)$.

Ecrivons la définition de limite :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, A \geq 1\ /\ \forall t \geq A,\ |t^2 f_k(t) - 0| \leq \varepsilon.$$

Compte tenu du fait que pour $t \geq A \geq 1$, $t^2 f_k(t) \geq 0$, l'écriture précédente devient :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, A \geq 1\ /\ \forall t \geq A,\ 0 \leq t^2 f_k(t) \leq \varepsilon.$

Appliquons cette propriété pour $\varepsilon = 1$.
$\exists\, A \geq 1\ /\ \ \forall t \geq A,\ 0 < t^2 f_k(t) \leq 1.$

Remarque : On aurait pu affirmer tout de suite cette dernière inégalité, car si $t^2 f_k(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, $t^2 f_k(t)$ " finit " par être inférieure à 1 (car si elle reste constamment supérieure à 1, elle ne pourra pas tendre vers 0).

Comme $t^2 > 0$, on déduit :

$$\forall t \geq A,\ 0 < f_k(t) \leq \frac{1}{t^2}.$$

On sait d'après **le critère de Riemann** que $\displaystyle\int_A^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente.

D'après **le théorème de comparaison des <u>fonctions</u> positives**, on conclut que $\displaystyle\int_A^{+\infty} f_k(t)dt$ est convergente. Donc

$$\boxed{\int_1^{+\infty} f_k(t)dt \text{ est convergente car sur } [1, A]\ f_k \text{ est continue.}}$$

- Si $x=0,\ f_k(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{5-k}}$. **Or ces deux fonctions sont positives, équivalentes au voisinage de $+\infty$, donc les intégrales $\int_1^{+\infty} f_k(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{5-k}}$ sont de même nature.**

Toujours d'après le critère de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{5-k}}$ converge si et seulement si $5-k>1$, c'est-à-dire si $k<4$.

> En résumé :
> Pour $x>0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_k(t)dt$ est convergente $\forall k \in \mathbb{N}$.
> Pour $x=0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_k(t)dt$ est convergente si et seulement si $k<4$.

QUESTION–2

La fonction f_0 est continue, positive strictement sur $[1,+\infty[$;

pour tout $x>0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_0(t)dt$ converge ;

pour $x=0$, l'intégrale converge car $k=0<4$.

Conclusion : l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_0(t)dt$ converge pour $x \geq 0$.

Les bornes sont dans l'ordre croissant, donc

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ F(x) > 0.}$$

- Soit x et y des réels tels que $0 \leq x < y$.

$$\begin{aligned} F(y)-F(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-yt}}{1+t^5}dt - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^5}dt \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{e^{-yt}}{1+t^5} - \frac{e^{-xt}}{1+t^5}\right)dt, \end{aligned}$$

d'après la propriété de **linéarité des intégrales convergentes**.

Posons $y=x+h$ $(h>0)$; on obtient alors

$$\begin{aligned} F(y)-F(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x+h)t}-e^{-xt}}{1+t^5}dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt-ht}-e^{-xt}}{1+t^5}dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}e^{-ht}-e^{-xt}}{1+t^5}dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}(e^{-ht}-1)}{1+t^5}dt. \end{aligned}$$

e^{-xt} est toujours strictement positif ; $\forall t \geq 1, \forall h>0,\ e^{-ht}-1<0$, car $-ht<0$; de plus $\frac{1}{1+t^5}>0$; donc

$$\frac{e^{-ht}(e^{-ht}-1)}{1+t^5} < 0.$$

Les bornes d'intégration sont dans **l'ordre croissant**, on conclut que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}(e^{-ht}-1)}{1+t^5}dt$ est négative (elle est même strictement négative).

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

$$\boxed{\forall x, y \ / \ 0 \leq x < y, \ F(y) - F(x) \leq 0. \ F \text{ est décroissante.}}$$

$\forall t \geq 1, \ 1 < 1 + t^5$, donc $0 < \dfrac{1}{1+t^5} < 1$.

On multiplie cet encadrement par $e^{-xt} > 0$, et l'on obtient : $0 < \dfrac{e^{-xt}}{1+t^5} < e^{-xt}$. Par suite, en intégrant entre 1 et $+\infty$ (ce qui ne pose pas de problème car les intégrales convergent), on obtient :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} f_0(t)dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-xt}dt. \qquad \textbf{(1)}$$

Calculons $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-xt}dt$:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} e^{-xt}dt &= \lim_{a\to+\infty} \int_1^a e^{-xt}dt \\ &= \lim_{a\to+\infty} \left[-\tfrac{1}{x}e^{-xt}\right]_1^a \\ &= \lim_{a\to+\infty} \left(-\tfrac{1}{x}e^{-xa} + \tfrac{1}{x}e^{-x}\right) \\ &= \tfrac{1}{x}e^{-x}\end{aligned}$$

car $x > 0 \Longrightarrow \displaystyle\lim_{a\to+\infty} e^{-xa} = 0$.

L'encadrement **(1)** s'écrit alors $0 \leq F(x) \leq \frac{1}{x}e^{-x}$.

Cet encadrement permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0.}$$

QUESTION–3

3–a)

Ici $h \geq 0$.

- Si $t = 0$, l'inégalité est vraie, elle s'écrit : $0 \leq 0$.
- Si $t > 0$, soit g l'application définie par $g(u) = e^{-tu}$. g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, et $g''(u) = t^2e^{-tu}$.

Sur $[x; x+h]$, $|g''(u)| = t^2e^{-tu}$; $|g''(u)| \leq t^2e^{-tx}$, car $u \longmapsto e^{-tu}$ est décroissante $(t > 0)$ sur $[x; x+h]$, son maximum est atteint au point x. On peut appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et $x+h$.

$$|g(x+h) - \sum_{k=0}^{1} \frac{h^k}{k!} g^{(k)}(x)| \leq \frac{h^2}{2!}t^2e^{-tx}.$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\boxed{|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + the^{-tx}| \leq \frac{t^2h^2}{2}e^{-tx}.}$$

car $\dfrac{h^0}{0!}g^{(0)}(x)g(x) = e^{-tx}$ et $\dfrac{h^1}{1!}g^{(1)}(x) = -the^{-xt}$.

3–b)

Ici $h \leq 0$.

- Si $t = 0$, l'inégalité est satisfaite et s'écrit : $0 \leq 0$.
- Si $t > 0$, on utilise la même fonction g sur $[x+h, x]$, car $h \leq 0$. Sur cet intervalle, $|g''(u)| \leq t^2e^{-t(x+h)}$ par décroissance de la fonction $u \longmapsto e^{-tu}$ sur l'intervalle $[x+h, x]$.

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 entre x et $x+h$ bien que $x+h$ soit inférieur à x, et l'on obtient :

$$|g(x+h) - \sum_{k=0}^{1} \frac{h^k}{k!} g^{(k)}(x)| \leq \frac{(-h)^2}{2!} t^2 e^{-t(x+h)}.$$

$$\boxed{|e^{-t(x+h)} - e^{-tx} + the^{-tx}| \leq \frac{t^2h^2}{2} e^{-t(x+h)}.}$$

3–c)

Pour tout $x \geq 0$ et $x+h \geq 0$,

Posons $\Delta(x,h) = F(x+h) - F(x)$.

$$\Delta(x,h) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{1+t^5} dt$$

$$\left|\Delta(x,h) + h \int_1^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt\right| = \left|\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt}}{1+t^5} dt + h \int_1^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt\right|$$

Remarque : L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt$ converge d'après la question 1 car elle correspond au cas $k = 1$.

$$\left|\Delta(x,h) + h \int_1^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt\right| = \left|\int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}}{1+t^5} dt\right|$$

par linéarité des intégrales convergentes.

$$\left|\Delta(x,h) + h \int_1^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt\right| \leq \int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{-(x+h)t} - e^{-xt} + hte^{-xt}}{1+t^5}\right| dt$$

car les bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant.

- **Si** $h \geq 0$. La dernière intégrale est majorée par $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2h^2e^{-xt}}{2(1+t^5)} dt$ d'après la question a) précédente et parce que les **bornes d'intégration sont dans l'ordre croissant**.
- **Si** $h \leq 0$. La dernière intégrale est majorée par $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2h^2e^{-(x+h)t}}{2(1+t^5)} dt$ d'après la question a) précédente et parce que les **bornes d'intégration sont toujours dans l'ordre croissant**.

Dans un cas comme dans l'autre, $e^{-(x+h)t}$ et e^{-xt} sont majorés par 1, car les exposants sont négatifs.

Comme $\dfrac{t^2h^2}{2(1+t^5)} \geq 0$, $e^{-xt} \leq 1$ et $e^{-(x+h)t} \leq 1$, les quantités $\dfrac{t^2h^2e^{-xt}}{2(1+t^5)}$ et $\dfrac{t^2h^2e^{-(x+h)t}}{2(1+t^5)}$ sont majorées par $\dfrac{t^2h^2}{2(1+t^5)}$.

Les bornes d'intégrations étant toujours dans l'ordre croissant, dans tous les cas l'intégrale est majorée par

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^2h^2}{2(1+t^5)} dt = \frac{h^2}{2} \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^5)} dt.$$

Conclusion : $\forall x \geq 0,\ \forall h \in \mathbb{R}\ /\ x+h \geq 0$,

$$\left|F(x+h) - F(x) + h \int_1^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt\right| \leq \frac{h^2}{2} \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^5} dt.$$

3–d)

Divisons les deux membres de l'inégalité précédente par $|h| > 0$ pour $h \neq 0$, on trouve

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \int_1^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^5} dt\right| \leq \frac{h^2}{2|h|} \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^5} dt.$$