ESSEC
MBA

CONCOURS D'ADMISSION DE 2000

Option économique

MATHEMATIQUES II

Lundi 15 Mai 2000 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

On considère un combat entre trois tireurs A, B, C, qui se déroule en une suite d'épreuves de la façon suivante, jusqu'à élimination d'au moins deux des trois tireurs :

- Tous les tirs sont indépendants les uns des autres.
- Lorsque A tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 2/3.
- Lorsque B tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/2.
- Lorsque C tire, la probabilité pour qu'il atteigne son adversaire est égale à 1/3.
- Lorsque qu'un des tireurs est atteint, il est définitivement éliminé des épreuves suivantes.
- A chacune des épreuves, les tireurs non encore éliminés tirent simultanément et chacun d'eux vise le plus dangereux de ses rivaux non encore éliminés.
  (Ainsi, à la première épreuve, A vise B tandis que B et C visent A).

Pour tout nombre entier $n \geq 1$, on considère les événements suivants :

ABC_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, A, B et C ne sont pas encore éliminés ».
AB_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, seuls A et B ne sont pas encore éliminés ».
On définit de façon analogue les événements BC_n et CA_n.
A_n : « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, seul A n'est pas éliminé ».
On définit de façon analogue les événements B_n et C_n.
$\varnothing_n$: « à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, les trois tireurs sont éliminés ».

Enfin, ABC_0 est l'événement certain, AB_0, BC_0, CA_0, A_0, B_0, C_0, $\varnothing_0$ l'événement impossible.

LES ANNALES

PARTIE I

On établit dans cette partie I quelques résultats probabilistes préliminaires.

1°) Calcul de probabilités.

a) Exprimer, si U et V désignent deux événements quelconques d'un espace probabilisé donné, la probabilité $p(U \cup V)$ de l'événement $U \cup V$ en fonction de $p(U)$, $p(V)$ et $p(U \cap V)$.

b) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :

(A rate son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

c) En déduire la probabilité pour qu'à une épreuve à laquelle participent A, B, C :

(A réussit son tir) et (B ou C réussissent leur tir).

2°) Détermination de probabilités conditionnelles

a) Montrer que l'événement AB_n est impossible pour tout nombre entier naturel n.
Dans la suite, on ne considérera donc que les événements ABC_n, BC_n, CA_n, A_n, B_n, C_n, $\varnothing_n$.

b) Expliciter la probabilité conditionnelle $p(ABC_{n+1} / ABC_n)$.

c) Expliciter $p(BC_{n+1} / ABC_n)$ à l'aide de la question 1°, puis donner $p(CA_{n+1} / ABC_n)$.

d) Expliciter $p(A_{n+1} / ABC_n)$, $p(B_{n+1} / ABC_n)$ et $p(C_{n+1} / ABC_n)$.

e) Expliciter $p(A_{n+1} / CA_n)$, $p(B_{n+1} / BC_n)$, $p(C_{n+1} / CA_n)$ et $p(C_{n+1} / BC_n)$.

f) Expliciter $p(\varnothing_{n+1} / ABC_n)$, $p(\varnothing_{n+1} / BC_n)$ et $p(\varnothing_{n+1} / CA_n)$.

3°) Nombre moyen d'épreuves à l'issue desquelles s'achève le combat

On note T la variable aléatoire indiquant le nombre d'épreuves à l'issue duquel cesse le combat, c'est à dire au delà duquel il ne reste qu'un tireur au plus.

a) Quelle est la probabilité de l'événement $T = 1$?

b) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de l'événement suivant :

$$ABC_1 \cap ABC_2 \cap \ \ldots \ \cap ABC_{n-1} \cap ABC_n.$$

c) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap CA_{k+1} \cap \ldots \cap CA_n$$

(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $CA_1 \cap CA_2 \cap \ \ldots \ \cap CA_n$).

d) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité de la réunion des événements suivants pour $0 \leq k \leq n-1$:

$$ABC_1 \cap \ldots \cap ABC_k \cap BC_{k+1} \cap \ldots \cap BC_n$$

(pour $k = 0$, il s'agit de l'événement $BC_1 \cap BC_2 \cap \ \ldots \ \cap BC_n$).

e) Soit $n \geq 2$. Calculer la probabilité $p(T > n)$ pour que le combat ne soit pas terminé à l'issue de la $n^{\text{ième}}$ épreuve, et en déduire la probabilité $p(T = n)$ (on vérifiera que cette formule redonne bien pour $n = 1$ le résultat obtenu à la question a).

f) Vérifier que la somme de la série de terme général $p(T = n)$ (avec $n \geq 1$) est égale à 1, puis déterminer sous forme de fraction irréductible l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.

PARTIE II

Dans cette partie, on détermine les probabilités pour que A, B, C remportent le combat.

1°) Expression de la matrice de transition M

a) On considère la matrice-colonne E_n à sept lignes dont les sept éléments sont dans cet ordre, du haut vers le bas, $p(ABC_n)$, $p(BC_n)$, $p(CA_n)$, $p(A_n)$, $p(B_n)$, $p(C_n)$, $p(\varnothing_n)$.
Expliciter une matrice M carrée d'ordre 7 vérifiant pour tout nombre entier naturel n :

$$E_{n+1} = ME_n.$$

On vérifiera que la somme de chacune des sept colonnes de cette matrice M est égale à 1.

b) En déduire E_n en fonction de n, de M et E_0.

2°) Calcul des puissances de la matrice M

a) On considère deux matrices carrées d'ordre 3 notées U', U'' et deux matrices rectangulaires à 4 lignes et 3 colonnes notées V', V'' et l'on forme les matrices carrées d'ordre 7 :

$$M' = \begin{bmatrix} U' & O \\ V' & I_4 \end{bmatrix}, \quad M'' = \begin{bmatrix} U'' & O \\ V'' & I_4 \end{bmatrix}$$

où O désigne la matrice nulle à 3 lignes et 4 colonnes et I_4 la matrice-identité d'ordre 4.
Vérifier à l'aide des règles du produit matriciel l'égalité suivante :

$$M'M'' = \begin{bmatrix} U'U'' & O \\ V'U'' + V'' & I_4 \end{bmatrix}.$$

c) Expliciter les matrices U et V telles que :

$$M = \begin{bmatrix} U & O \\ V & I_4 \end{bmatrix}.$$

d) Etablir enfin par récurrence sur $n \geq 1$ l'égalité suivante :

$$M^n = \begin{bmatrix} U^n & 0 \\ V + VU + \ldots + VU^{n-1} & I_4 \end{bmatrix}.$$

3°) Diagonalisation de la matrice U

a) Déterminer les valeurs propres λ_1, λ_2, λ_3 de U avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et les vecteurs propres associés V_1, V_2, V_3 tels que :
- la *première* composante de V_1 vaut 1.
- la *troisième* composante de V_2 vaut 1.
- la *deuxième* composante de V_3 vaut 1.

b) On note P la matrice d'ordre 3 dont les vecteurs-colonnes sont, dans cet ordre, V_1, V_2, V_3. Expliciter la matrice inverse P^{-1} et préciser la matrice $D = P^{-1}UP$.

4°) Calcul de la limite des puissances de la matrice M

a) Expliciter les matrices D^n et $I_3 + D + D^2 + \ldots + D^{n-1}$.

b) On dit qu'une suite de matrices (X_n) à p lignes et q colonnes converge vers une matrice X à p lignes et q colonnes si chaque coefficient de la matrice X_n converge quand n tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de la matrice X.
On admettra (sous réserve d'existence) que la limite d'un produit est le produit des limites. Expliciter à l'aide des résultats précédents les limites des deux suites matricielles (D^n) et $(I_3 + D + D^2 + \ldots + D^{n-1})$, puis des trois suites matricielles (U^n), $(I_3 + U + U^2 + \ldots + U^{n-1})$ et $(V + VU + VU^2 + \ldots + VU^{n-1})$.

c) En déduire enfin les limites des deux suites matricielles (M^n) et (E_n).

d) Vérifier que les suites $(p(\text{ABC}_n))$, $(p(\text{BC}_n))$ et $(p(\text{CA}_n))$ convergent vers 0 et expliciter sous forme d'une fraction irréductible les limites des suites $(p(\text{A}_n))$, $(p(\text{B}_n))$, $(p(\text{C}_n))$, $(p(\varnothing_n))$.
Comparer les probabilités respectives pour que A, B, C remportent le combat.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2000

ESSEC : MATH II

CORRIGE

ESSEC MATH II

PARTIE–I

La notation $p(A/_B)$ **est l'ancienne notation pour** $p_B(A)$.

QUESTION–1

1–a)

$p(U \cup V) = p(U) + p(V) - p(U \cap V)$.

1–b)

Notons $\overline{A}$ l'événement " le tireur A rate son tir ", B l'événement " le tireur B réussit son tir " et C l'événement " le tireur C réussit son tir ".

On veut $p(\overline{A} \cap (B \cup C))$.

$$\begin{aligned} p(\overline{A} \cap (B \cup C)) &= p((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap C)) \\ &= p(\overline{A} \cap B) + p(\overline{A} \cap C) - p((\overline{A} \cap B) \cap (\overline{A} \cap C)) \\ &= p(\overline{A} \cap B) + p(\overline{A} \cap C) - p(\overline{A} \cap B \cap C) \\ &= p(\overline{A})p(B) + p(\overline{A})p(C) - p(\overline{A})p(B)p(C) \\ &\quad \textbf{par indépendance} \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{18}\Big(3 + 2 - 1\Big) = \frac{4}{18}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(\overline{A} \cap (B \cup C)) = \frac{2}{9}.}$$

1–c)

On veut $p(A \cap (B \cup C))$.

$$\begin{aligned} p(A \cap (B \cup C)) &= p((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= p(A \cap B) + p(A \cap C) - p((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\ &= p(A \cap B) + p(A \cap C) - p(A \cap B \cap C) \\ &= p(A)p(B) + p(A)p(C) - p(A)p(B)p(C) \\ &\quad \textbf{par indépendance} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\boxed{p(A \cap (B \cup C)) = \frac{4}{9}.}$$

QUESTION–2

2–a)

• AB_n : c'est l'événement " à l'issue de la n ème épreuve, seuls A et B ne sont pas encore éliminés. A et B étant les plus dangereux, personne ne tire sur C : donc C n'est jamais éliminé tant que A et B sont en lice.

$$\boxed{AB_n \text{ est impossible.}}$$

2–b)

$p(ABC_{n+1}/ABC_n) = p(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$, **par indépendance**

$$\boxed{p(ABC_{n+1}/ABC_n) = \frac{1}{9}.}$$

2–c)

• $p(BC_{n+1}/ABC_n)$ est la probabilité que seuls B et C ne soient pas éliminés à l'issue de la n ème épreuve sachant que A, B et C sont en lice au cours de cette n ème épreuve, c'est donc la probabilité que A rate son tir et que B ou C réussisse le sien.

$$\boxed{p(BC_{n+1}/ABC_n) = p(\overline{A}\cap(B\cup C)) = \frac{2}{9}.}$$

• $p(CA_{n+1}/ABC_n)$ est la probabilité que seuls A et C restent en lice à l'issue de la n ème épreuve sachant que les trois tireurs tirent, c'est donc la probabilité que seul A réussisse son tir (car A vise B, C et B visent A).

$$\boxed{p(CA_{n+1}/ABC_n) = p(\overline{B}\cap\overline{C}\cap A) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\ \textbf{(par indépendance)}=\frac{2}{9}.}$$

2–d)

$p(A_{n+1}/ABC_n)$ est la probabilité que B et C disparaissent, lorsque les trois tireurs sont en lice ; cette probabilité est nulle car **personne** ne tire sur C.

Donc $p(A_{n+1}/ABC_n) = 0.$

De même $p(B_{n+1}/ABC_n) = 0.$

$p(C_{n+1}/ABC_n)$ est la probabilité que B ou C élimine A et que A élimine B, lorsque les trois tireurs sont en lice.

Donc $p(C_{n+1}/ABC_n) = p(A\cap(B\cup C)) = \frac{4}{9}.$

2–e)

Le lecteur vérifiera sans peine que :

$$\begin{aligned}
p(A_{n+1}/CA_n) &= p(A\cap\overline{C}) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 &&= \frac{4}{9}\\
p(B_{n+1}/BC_n) &= p(B\cap\overline{C}) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} &&= \frac{1}{3}\\
p(C_{n+1}/CA_n) &= p(\overline{A}\cap C) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 &&= \frac{1}{9}\\
p(C_{n+1}/BC_n) &= p(\overline{B}\cap C) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} &&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

2–f)

$$\begin{aligned}
p(\Phi_{n+1}/ABC_n) &= 0 \quad \text{car } \textbf{personne} \text{ ne tire sur } C\\
p(\Phi_{n+1}/BC_n) &= p(B\cap C) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}\\
p(\Phi_{n+1}/CA_n) &= p(A\cap C) = \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2}{9}.
\end{aligned}$$