CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

E.S.C.P. - E.A.P.

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 17 Mai 2000, de 8h. à 12h.

EXERCICE I

Dans tout l'exercice, α désigne un paramètre réel. On considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

et on note ϕ_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. **a)** Montrer que, quel que soit α, l'endomorphisme ϕ_α admet la valeur propre 1.

b) On note $E_1(\alpha)$ le sous-espace propre de ϕ_α associé à la valeur propre 1. Déterminer, suivant les valeurs de α, une base de $E_1(\alpha)$.

2. On considère les vecteurs

$$f_1 = (1,1,-1) \quad \text{et} \quad f_2 = (1,1,-2)$$

et on note F_1 le sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par f_1 et f_2.

a) Montrer que (f_1, f_2) est une base de F_1.

b) Montrer que l'image par ϕ_α de tout vecteur de F_1 appartient à F_1.

c) Soit $\widehat{\phi}_\alpha$ l'endomorphisme de F_1 induit par ϕ_α c'est-à-dire vérifiant, pour tout vecteur V de F_1, $\widehat{\phi}_\alpha(V) = \phi_\alpha(V)$. Donner la matrice de $\widehat{\phi}_\alpha$ dans la base (f_1, f_2) de F_1.

3. Montrer que, pour tout réel α, l'endomorphisme ϕ_α admet la valeur propre $\alpha - 1$ et qu'on peut trouver un vecteur f_3 de $\mathbb{R}^3$ ne dépendant pas de α, qui soit, pour tout réel α, vecteur propre de ϕ_α associé à la valeur propre $\alpha - 1$.

4. **a)** Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de ϕ_α dans cette base.

b) Pour quelles valeurs du paramètre α l'endomorphisme ϕ_α est-il diagonalisable ?

EXERCICE II

I. Étude d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire

Étant donné un paramètre réel $\alpha > 0$, on note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des suites $U = (u_n)_{n \geq 0}$ de réels qui vérifient, pour tout n positif, la relation

$$u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$$

1. Montrer qu'on peut trouver deux réels r et s, avec $r < s$, tels que les suites $R = (r^n)_{n \geq 0}$ et $S = (s^n)_{n \geq 0}$ forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$. Exprimer r et s en fonction de α et comparer $|r|$ et $|s|$.

2. Étant donné un élément $U = (u_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{E}$ s'écrivant $U = aR + bS$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, donner l'expression de a et b en fonction de u_0 et u_1.

3. On suppose, dans cette question, que l'on a $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Soit $U = (u_n)_{n \geq 0}$ un élément de $\mathcal{E}$.

a) Montrer que la suite U converge vers 0.

b) Si $u_1 - u_0 r$ n'est pas nul, montrer qu'il existe un indice n_0 tel que, pour $n > n_0$, u_n ne s'annule pas et garde un signe constant et que l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln |u_n|}{n} = \ln s$$

c) Montrer que si, au contraire, $u_1 - u_0 r$ est nul et si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ n'est pas identiquement nulle, alors, pour tout entier n positif, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires. Quel équivalent peut-on donner, dans ce cas, de $\ln |u_n|$?

4. On suppose, dans cette question, que l'on a $\frac{1}{2} < \alpha$.

À quelle condition sur u_0 et u_1 l'élément $U = (u_n)_{n \geq 0}$ de $\mathcal{E}$ est-il une suite bornée ? Montrer que les éléments de $\mathcal{E}$ qui sont des suites bornées forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ dont on précisera la dimension.

II. Étude d'une récurrence non linéaire

Soit β un réel strictement positif. On note $m = \min(1, \beta)$ le plus petit des nombres 1 et β et $M = \max(1, \beta)$ le plus grand de ces nombres.

On considère la suite $V = (v_n)_{n \geq 0}$ vérifiant $v_0 = 0$, $v_1 = \beta$ et, pour tout n positif, la relation

$$v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n}$$

1. Montrer, pour tout n strictement positif, l'inégalité $m \leq v_n \leq 4M$.

2. Montrer que si la suite V admet une limite, cette limite est nécessairement égale à 4.

On se propose de montrer que, pour tout β strictement positif, la suite V admet effectivement pour limite 4.

3. Montrer, pour tout n positif, l'inégalité

$$|v_{n+2} - 4| \leq \frac{|v_{n+1} - 4|}{\sqrt{v_{n+1}} + 2} + \frac{|v_n - 4|}{\sqrt{v_n} + 2}$$

4. On pose $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{m} + 2}$ et on considère la suite $U = (u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence linéaire $u_{n+2} = \alpha(u_{n+1} + u_n)$ et les conditions initiales $u_0 = |v_1 - 4|$ et $u_1 = |v_2 - 4|$. Montrer que, pour tout n strictement positif, $|v_n - 4| \leq u_{n-1}$.

5. En conclusion, montrer à l'aide des résultats de la première partie que la suite V converge vers 4.

6. Écrire un programme Turbo-Pascal qui lise un entier N et un réel β et qui affiche, en sortie, les N premiers termes de la suite V.

EXERCICE III

Sachant qu'un appareil a fonctionné correctement pendant une certaine durée x, on s'intéresse à la probabilité pour qu'il continue à bien fonctionner pendant encore au moins une durée y. Pour cela on convient de représenter la durée de vie de ce type d'appareil par une variable aléatoire réelle X définie sur un espace probabilisé dont on notera la probabilité $\mathbf{P}$. L'exercice a pour objet l'étude de quelques fonctions liées à cette durée de vie.

I. On suppose d'abord que X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(X = n)$ n'est pas nul. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$p_n = \mathbf{P}(X = n), \qquad G_n = \mathbf{P}(X \geq n) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k \quad \text{et} \quad Z_n = \frac{p_n}{G_n}$$

1. Justifier les inégalités $0 < p_n < G_n \leq 1$ et $0 < Z_n < 1$.

2. Soit n un entier naturel. Établir l'égalité $\mathbf{P}(X \geq n+1 \,/\, X \geq n) = 1 - Z_n$.

3. **a)** Montrer que la suite $\big(\mathbf{P}(X \geq n+1 \,/\, X \geq n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante si et seulement si la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.

b) Vérifier que les conditions précédentes sont réalisées dans le cas où la loi de X est une loi géométrique.

c) Réciproquement, on suppose qu'il existe une constante p appartenant à $]0,1[$ telle que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit la suite constante égale à p. Montrer par récurrence que X suit une loi géométrique.

4. Montrer que si, pour tout entier m de $\mathbb{N}^*$, la suite $\left(\dfrac{p_{n+m}}{p_n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, alors la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $\big(\mathbf{P}(X \geq n+1 \,/\, X \geq n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. (On dit alors qu'il y a vieillissement de l'appareil dont X est la durée de vie.)

II. On suppose maintenant que la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et admet une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. On pose, pour tout réel strictement positif x,

$$G(x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad Z(x) = \frac{f(x)}{G(x)}$$

1. **a)** Si x et y sont des réels strictement positifs, on pose $H(x,y) = \dfrac{G(x+y)}{G(x)}$. Montrer que l'on a alors, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}_+^*$, l'égalité :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = \frac{G(x+y)}{G(x)}\,\big(Z(x) - Z(x+y)\big)$$

b) Montrer que la fonction $x \mapsto Z(x)$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si, pour tout réel y strictement positif fixé, la fonction $x \mapsto \mathbf{P}(X \geq x+y \,/\, X \geq x)$ est une fonction décroissante.

2. **a)** Montrer que si la loi de X est une loi exponentielle, alors la fonction Z est constante.

b) Réciproquement, montrer que si Z est la fonction constante égale au réel strictement positif λ, alors la fonction $x \mapsto e^{\lambda x} G(x)$ est constante. Quelle est alors la loi de X ?

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2000

ESCP-EAP : MATH III

CORRIGE

EXERCICE–1

QUESTION–1

1–a)

1 est une valeur propre de A_α si et seulement si la matrice $A_\alpha - I_3$ n'est pas inversible.

$$A_\alpha - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

On effectue $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$; on obtient la matrice $\begin{pmatrix} -2 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La dernière ligne est nulle ; la matrice $A_\alpha - I_3$ n'est pas inversible.

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A_\alpha.}$$

1–b)

Un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ appartient au sous-espace propre associé à la valeur propre 1 si et seulement si $A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Or

$$A_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y - \alpha z & = 0 \\ -\alpha x \quad - \alpha z & = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y - \alpha z & = 0 \\ -\alpha(x+z) & = 0. \end{cases}$$

<u>1 er cas : $\alpha = 0$.</u>

Le système précédent équivaut à $x - y = 0$. Le sous-espace propre est alors :

$$\begin{aligned} E_1(0) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x - y = 0\} \\ &= \{(x, x, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1) \ / \ (x, z) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

$$\boxed{E_1(0) = \text{vect}\Big((1, 1, 0), (0, 0, 1)\Big)}$$

Les deux vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ forment une famille génératrice de $E_1(0)$. De plus, ils ne sont pas colinéaires ; ils forment donc une famille libre, donc une base de $E_1(0)$.

<u>2 ème cas : $\alpha \neq 0$.</u>

Le système devient

$$\begin{cases} 2x + (\alpha - 2)y + \alpha z & = 0 \\ x + z & = 0 \end{cases}$$

Système qui équivaut à

$$\begin{cases} (2-\alpha)(x-y) & = 0 \\ z & = -x. \end{cases}$$

- <u>Si $\alpha = 2$.</u>

Le système devient $z = -x$.

$$\begin{aligned} E_1(2) &= \{(x, y, -x) \in \mathbb{R}^3 \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 0-1) + y(0, 1, 0) \ / \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}. \end{aligned}$$

$$\boxed{E_1(2) = \text{vect}\Big((1, 0-1), (0, 1, 0)\Big)}$$

Les deux vecteurs $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 0)$ forment une famille génératrice de $E_1(2)$. De plus, ils ne sont pas colinéaires ; ils forment donc une famille libre, donc une base de $E_1(2)$.

- <u>Si $\alpha \neq 2$ (et $\alpha \neq 0$)</u>

Le système devient $\begin{cases} z & = -x \\ y & = x. \end{cases}$

$$\boxed{E_1(\alpha) = \text{vect}\Big((1, 1, -1)\Big).}$$

QUESTION–2

2–a)

f_1 et f_2 ne sont pas colinéaires ; ils forment une famille libre,

donc $\boxed{\text{une base de } F_1.}$

2–b)

Il suffit de montrer que $\Phi_\alpha(f_1) \in F_1$ et $\Phi_\alpha(f_2) \in F_1$. En effet

$\forall f \in F_1 = \text{vect}(f_1, f_2),\ \exists!(a, b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f = af_1 + bf_2$.

Donc, par linéarité, $\Phi_\alpha(f) = a\Phi_\alpha(f_1) + b\Phi_\alpha(f_2) \in F_1$, car, F_1 étant un sous-espace vectoriel, F_1 est stable par combinaisons linéaires.

On a donc bien $\forall f \in F_1,\ \Phi_\alpha(f) \in F_1$.

Calculons $\Phi_\alpha(f_1)$.

$$A_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\Phi_\alpha(f_1) = f_1$.

Remarque : on aurait pu éviter ce calcul, car $f_1 \in E_1(1)$.

Calculons $\Phi_\alpha(f_2)$.

$$A_\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1+\alpha \\ -2-\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \qquad \Phi_\alpha(f_2) = f_2 + \alpha f_1.$$

Conclusion : $\Phi_\alpha(f_1) \in F_1$ et $\Phi_\alpha(f_2) \in F_1$.

$$\boxed{F_1 \text{ est stable par } \Phi_\alpha.}$$

2–c)

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_\alpha(f_1) &= \Phi_\alpha(f_1) &&= f_1 \\ \hat{\Phi}_\alpha(f_2) &= \Phi_\alpha(f_2) &&= \alpha f_1 + f_2. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La matrice de } \hat{\Phi}_\alpha \text{ dans la base } f_1, f_2) \text{ est donc } \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

QUESTION–3

$\alpha - 1$ est valeur propre de Φ_α si et seulement si la matrice $A_\alpha - (\alpha-1)I_3$ n'est pas inversible.

$A_\alpha - (\alpha - 1)I_3 = \begin{pmatrix} -\alpha & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2-\alpha & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & 2 \end{pmatrix}$. On effectue $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$; la matrice devient $\begin{pmatrix} -\alpha & 2-\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-2 & 2 \end{pmatrix}$.

La deuxième ligne est nulle ; la matrice $A_\alpha - (\alpha-1)I_3$ n'est donc pas inversible.

$$\boxed{\alpha - 1 \text{ est valeur propre de } A_\alpha.}$$

(x, y, z) appartient au sous-espace propre associé à la valeur propre $\alpha-1$ si et seulement si $\Big(A_\alpha - (\alpha-1)I_3\Big)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Cette égalité matricielle équivaut au système

$$\begin{cases} -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z &= 0 \\ 2x + (\alpha-2)y + 2z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z &= 0 \\ (2-\alpha)(x+z) &= 0 \end{cases}$$

on a effectué $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$

$$\iff \begin{cases} (2-\alpha)y - \alpha(x+z) &= 0 \\ (2-\alpha)(x+z) &= 0. \end{cases}$$

Remarquons que $(1, 0, -1)$ vérifie ce système pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous prendrons donc $\boxed{f_3 = (1, 0, -1).}$

QUESTION–4

4–a)

Ecrivons la matrice M des coordonnées en colonne de (f_1, f_2, f_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ On effectue $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 + L_1$. On obtient

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ On effectue alors $L_3 \longleftrightarrow L_2$; cela donne

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

