CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES II

Mardi 16 Mai 2000, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Ce problème se compose de cinq parties : il étudie deux suites de variables aléatoires discrètes et une simulation informatique.
Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.
Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à k-1), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.
On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1.
On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.
On note $E(X_n)$ et $V(X_n)$ (respectivement $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

LES ANNALES

Partie 1.

1. On pose : $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

a. Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

où ln désigne le logarithme népérien.

b. En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln n$

c. Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.

2. On pose : $k_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.

a. Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b. En déduire la majoration : $k_n \leq 2$.

c. Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

Partie 2 : Etude de la variable aléatoire X_n.

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1.a. Quelle est la loi de I_n ?

b. Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $I_n = 1$?

c. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer : $\forall j \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \in \{2, \ldots, n\} \quad P(X_n = j / I_n = k) = P(X_{k-1} = j-1)$.

2.a. Quelle est la loi de X_1 ?

b. Quel est l'événement $(X_2 = 1)$? Donner la loi de X_2, son espérance et sa variance.

c. Calculer $P(X_3 = 2 / I_3 = 1)$, $P(X_3 = 2 / I_3 = 2)$, $P(X_3 = 2 / I_3 = 3)$. Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

3.a. Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.

b. Déterminer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.

c. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation : $\forall j \geq 2 \quad P(X_n = j) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} P(X_k = j-1)$.

d. Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer : $nP(X_n = j) - (n-1)P(X_{n-1} = j)$.

En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geq 1 \quad P(X_n = j) = \frac{n-1}{n} P(X_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(X_{n-1} = j-1).$$

4.a. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant 3.d. : $E(X_n) = E(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$.

b. En déduire $E(X_n)$ et donner un équivalent simple de $E(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

5.a. Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $E(X_n^2)$ en fonction de $E(X_{n-1}^2)$ et de $E(X_{n-1})$.

b. En déduire : $V(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations introduites en Partie 1).

c. Donner un équivalent de $V(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

6. Soit $(T_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On pose : $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i = T_1 + \ldots + T_n$.

a. Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

b. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul :

$$P(S_n = j) = \frac{1}{n} P(S_{n-1} = j-1) + \frac{n-1}{n} P(S_{n-1} = j).$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

c. Retrouver ainsi $E(X_n)$ *et* $V(X_n)$.

Partie 3 : Etude de la variable aléatoire Y_n.

1. Donner la loi de Y_1.

2.a. Quelles sont les valeurs prises par Y_2 ?

b. Déterminer la loi de Y_2.

3.a. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier j non nul et tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$P(Y_n = j / I_n = k) = P(Y_{k-1} = j-k).$$

b. Si n est supérieur ou égal à 2, en déduire, pour tout entier j supérieur ou égal à 1 :

$$P(Y_n = j) = \frac{n-1}{n} P(Y_{n-1} = j) + \frac{1}{n} P(Y_{n-1} = j-n).$$

c. Si n est supérieur ou égal à 2, montrer : $E(Y_n) = E(Y_{n-1}) + 1$.

Que vaut $E(Y_n)$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ?

Partie 4. Simulation informatique.

Dans le langage informatique PASCAL, la fonction *random(n)* renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et n-1. On donne la procédure suivante :

```
Procedure Truc ( n : integer ; var a , b : integer) ;
Var alea : integer ;
Begin
        alea : = random (n) + 1 ;
        writeln (alea) ;
        if alea > 1 then   begin
                                a := a + 1 ;
                                b := b + alea ;
                                Truc ( alea - 1 , a , b)
                          end ;
End ;
```

et le programme principal suivant :

```
Var n , a , b : integer ;
Begin
        a := 1 ; b := 1 ;
        write (' n : ') ; readln (n);
        Truc ( n , a , b) ;
        writeln ('a = ' , a , 'b = ', b );
End.
```

1. Que fait ce programme ? Que représentent a et b ?
2. Cet algorithme est récursif. Transformer ce programme en un programme itératif écrit en Pascal.

Partie 5.

On considère l'urne U_n contenant n boules numérotées entre 1 et n. A partir de l'urne U_n, on effectue la suite de tirages décrite dans l'en-tête du problème. Pour i entier de $\{1, \ldots, n\}$, on définit $Z_i^{(n)}$ la variable aléatoire égale à 1 si, lors d'un quelconque de ces tirages, on a obtenu la boule numéro i, égale à 0 sinon.

1. Quelle est la loi de $Z_n^{(n)}$? Que dire de la variable $Z_1^{(n)}$?

2.a. Si n est supérieur ou égal à 2, et i un entier de $\{1, \ldots, n\text{-}1\}$, montrer la relation :

$$P(Z_i^{(n)} = 1) = \frac{1}{n} + \sum_{k=i+1}^{n} \frac{1}{n} P(Z_i^{(k-1)} = 1).$$

b. Montrer par récurrence que, pour tout n de N* et pour tout i de $\{1, \ldots, n\}$, $Z_i^{(n)}$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/i$.

3. Que vaut $\sum_{i=1}^{n} Z_i^{(n)}$? Retrouver ainsi $E(X_n)$.

4. Retrouver $E(Y_n)$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2000

HEC, ESCP-EAP, EM-LYON MATH II

CORRIGE

PARTIE–I

QUESTION–1

1–a)

C'est une inégalité classique : elle est due à la décroissance de la fonction $t \longmapsto \frac{1}{t}$ sur l'intervalle $[k, k+1]$, pour $k \geq 1$. En effet,

$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$; on intègre ces inégalités (les bornes sont dans l'ordre croissant) et l'on obtient :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k}.$$

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}. \qquad \mathbf{(1)}}$$

b)

- On somme ces inégalités pour k variant de 1 à n pour $n \geq 1$; dans le terme du milieu, il y a un télescopage " additif ". Cela donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n+1) - \ln 1 \leq h_n \quad \text{puis} \quad \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \leq \ln(n+1) \leq h_n$$

$$\text{et} \quad h_{n+1} - 1 \leq \underline{\ln(n+1) \leq h_n} \qquad \mathbf{(2)}$$

Dans la première somme, on a posé $j = k+1$.

- Sommons les inégalités **(1)** pour $n \geq 2$ et pour k variant de 1 à $n-1$. On obtiendra de la même façon :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln n - \ln 1 \leq h_{n-1} \quad ; \quad \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leq \ln(n) \leq h_{n-1}$$

$$\text{puis} \quad \underline{h_n - 1 \leq \ln n} \leq h_{n-1} \qquad \mathbf{(3)}$$

En combinant les inégalités soulignées des encadrements **(2)** et **(3)**, on obtient pour $n \geq 2$:

$$\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln n.$$

Or on constate que cet encadrement est valable pour $n = 1$ (il donne $\ln 2 \leq 1 \leq 1 + 0$)

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ \ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln n. \qquad \mathbf{(4)}}$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

c)

$$\begin{aligned}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} &= \frac{\ln n(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\\ &= 1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\\ \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} &= 1 \quad \textbf{car} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n} = 0.\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Nous venons de montrer que } \ln(n+1) \underset{+\infty}{\sim} \ln n.}$$

Partons de l'encadrement **(4)** et divisons les termes par $\ln n$ qui est strictement positif dès que $n \geq 2$. Il vient

$$\underbrace{\frac{\ln(n+1)}{\ln n}}_{\to 1} \leq \frac{h_n}{\ln n} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{\ln n}}_{\to 1}$$

$$\boxed{h_n \underset{(+\infty)}{\sim} \ln n.}$$

QUESTION–2

2–a)

$\dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k(k-1)} \geq \dfrac{1}{k^2}$, car $0 < k(k-1) \leq k^2$.

$$\boxed{\forall k \geq 2,\ \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.}$$

b)

Sommons les inégalités précédentes pour k variant de 2 à n. On a

$\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n} \leq 1$ (" télescopage additif ").

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 = 2.$ $\boxed{\forall n \geq 1,\ k_n \leq 2.}$

c)

$h_n - k_n = h_n\left(1 - \dfrac{k_n}{h_n}\right)$. **La suite** (k_n) **est bornée par** 0 **et** 2**, la suite** $\left(\dfrac{1}{h_n}\right)$ **a pour limite** 0 **car** $\dfrac{1}{h_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln n}$**, donc** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{k_n}{h_n} = 0.$

Conséquence

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{h_n - k_n}{h_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{k_n}{h_n}\right) = 1.$ $\boxed{h_n - k_n \underset{(+\infty)}{\sim} h_n.}$