www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

# ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
# ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS
# ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

## MATHEMATIQUES II

Samedi 15 Mai 1999, de 8h. à 12h.

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*
*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

LES ANNALES

On désire tester si un algorithme générateur de nombres aléatoires est satisfaisant.
On étudie quelques aspects probabilistes permettant de répondre à cette question.
Les parties 1 et 2 sont indépendantes. La partie 3 utilise les notations et les résultats des parties précédentes.

**Notation**
Si $X$ et $Y$ sont deux variables aléatoires discrètes, on note $cov(X,Y)$ leur covariance, si celle-ci existe.

### Partie 1

Soit $n$ et $s$ des entiers supérieurs ou égaux à 2. On considère une urne contenant des boules de couleurs $C_1$ , ..,$C_s$ . Les boules de couleur $C_i$ sont en proportion $p_i$ . On a donc $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$ et on suppose que, pour tout $i$, $p_i > 0$.

On effectue $n$ tirages successifs d'une boule avec remise.
Pour tout $i$ de $\{1,..,s\}$, on note $X_i$ la variable aléatoire égale au nombre de boules de couleur $C_i$ obtenues à l'issue des $n$ tirages (on remarque que la variable $X_i$ dépend de $n$) . On définit la variable aléatoire $U_n$ par : $U_n = \sum_{i=1}^{s} \frac{(X_i - np_i)^2}{np_i}$.

**A. Etude des variables $X_i$.**

1) Déterminer la loi de $X_i$ , son espérance et sa variance.

2) Soit $(i,j) \in \{1,..,s\}^2$ tel que $i \neq j$ . Déterminer la loi de $X_i + X_j$ et sa variance .
En déduire que $cov(X_i, X_j) = -np_ip_j$ .

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

**B. On suppose dans cette partie que $s = 2$.**

1) Montrer que $U_n = Z_1^2$ où $Z_1 = \dfrac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1 p_2}}$. ( On utilisera la relation : $X_1 + X_2 = n$ )

2) Par quelle loi peut-on approcher la loi de $Z_1$ lorsque $n$ est grand ?

**C. On suppose dans cette partie que $s = 3$ et que $p_1 = p_2 = \dfrac{1}{4}$ et $p_3 = \dfrac{1}{2}$.**

On pose $Z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\left(X_3 - \dfrac{n}{2}\right)$ et $Z_2 = \sqrt{\dfrac{2}{n}}\left(X_1 - X_2\right)$.

1) Montrer que $U_n = Z_1^2 + Z_2^2$ . ( On utilisera la relation : $X_1 + X_2 + X_3 = n$ )

2) Déterminer les espérances et variances de $Z_1$ et $Z_2$ et $cov(Z_1, Z_2)$.

3) Par quelle loi peut-on approcher celle de $Z_1$ lorsque $n$ est grand?

4) Pour $i$ élément de $\{1,..,n\}$, on définit la variable $T_i$ par : $T_i = 1$ si au $i$ème tirage on a obtenu une boule de couleur $C_1$, $T_i = -1$ si au $i$ème tirage on a obtenu une boule de couleur $C_2$ , $T_i = 0$ si au $i$ème tirage on a obtenu une boule de couleur $C_3$ .
   a) Exprimer $X_1 - X_2$ à l'aide des variables $T_i$ .
   b) En déduire que l'on peut approcher la loi de $Z_2$ , quand $n$ est grand, par la loi normale centrée réduite.

5) On suppose avoir défini dans un programme Pascal :
   *Type Tableau = Array[1..100] of integer;*

   a) Ecrire une procédure *procedure Tirage( var C : Tableau);* permettant de simuler le tirage avec remise de 100 boules dans une urne contenant des boules de couleur $C_1$ ou $C_2$ ou $C_3$ en proportion respectivement $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}$ .
L'élément $C[i]$ vaut 1, 2 ou 3 et représente la couleur de la $i$ème boule tirée ($C_1$ , $C_2$ ou $C_3$). On utilisera la fonction *random* : *random*(4) retourne un entier aléatoire compris entre 0 et 3.
   b) Ecrire une fonction *Difference* de paramètre $C$ qui retourne la valeur de $X_1 - X_2$ .

**D. On suppose $s = 4$ et $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \dfrac{1}{4}$.**

Soit $A$ une matrice réelle à $p$ lignes et $m$ colonnes dont le coefficient en ligne $i$ et colonne $j$ est noté $a_{ij}$. On définit la matrice à $m$ lignes et $p$ colonnes appelée transposée de $A$ et notée ${}^tA$ dont le coefficient en ligne $i$ et colonne $j$ vaut $a_{ji}$. On utilisera sans le démontrer que, pour toutes matrices $A$ et $B$ telles que le produit $AB$ existe, ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$.

1) Pour $i$ élément de $\{1, 2, 3, 4\}$, on pose $Y_i = \dfrac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}}$ .

On note $M$ la matrice carrée d'ordre 4 dont le coefficient en ligne $i$ et colonne $j$ vaut $cov(Y_i , Y_j)$. On définit $N$ la matrice carrée d'ordre 4 dont tous les coefficients sont égaux à $\dfrac{1}{4}$.
Exprimer $M$ en fonction de $N$ et de $I$, où $I$ désigne la matrice unité.

2) a) On définit 4 vecteurs de $\mathbb{R}^4$ : $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$, $e_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0)$, $e_3 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(1,1,1,-3)$, $e_4 = \dfrac{1}{2}(1,1,1,1)$.
Montrer que ces 4 vecteurs sont des vecteurs propres de $N$ et qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^4$ .
   b) Soit $Q$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^4$ à la base $(e_1, e_2, e_3, e_4)$.
Montrer que ${}^tQ\,Q = I$ .
Expliciter la matrice ${}^tQ\,M\,Q$.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

3) On définit les variables $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$ et $Z_4$ par : $\begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = {}^tQ \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$.

a) Exprimer chaque $Z_i$ en fonction de $Y_1$, $Y_2$, $Y_3$ et $Y_4$ et montrer que $Z_4 = 0$.

b) Montrer que, pour $i = 1, 2, 3$, les variables $Z_i$ sont centrées.

c) Montrer que $U_n = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2$. ( On pourra calculer $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$ )

## Partie 2

1) Soit $r$ un entier supérieur ou égal à 2.

Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$. On note $J_r$ sa valeur.

2) a) Pour tout réel $t$ strictement positif, établir la convergence de l'intégrale $\int_t^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$. On note $G(t)$ sa valeur.

b) Montrer à l'aide d'un changement de variable que, pour tout réel $t$ strictement positif, $G(t) = 2\sqrt{2\pi}\left(1 - \Phi\left(\sqrt{t}\right)\right)$ où $\Phi$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

c) En déduire la convergence et la valeur $J_1$ de $\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$.

3) Soit $r$ un entier naturel non nul. On définit la fonction $f_r$ par :

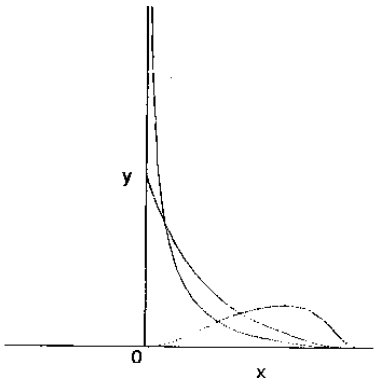
$$\forall x > 0, \quad f_r(x) = \frac{1}{J_r} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \forall x \leq 0, \quad f_r(x) = 0.$$

a) Montrer que $f_r$ est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire $X$ suit la loi du $\chi^2$ (lire khi-deux) à $r$ degrés de liberté si et seulement si $X$ admet $f_r$ pour densité.

b) Quelle loi reconnaît-on pour $r = 2$ ?

c) Recopier le graphique ci-dessous en identifiant les courbes représentatives des trois fonctions $f_1$, $f_2$, $f_7$ en justifiant avec précision la réponse.




LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

## Partie 3

On reprend les notations de la partie 1, avec $s$ entier quelconque supérieur ou égal à 2.

**On admet que, $n$ étant grand, la variable $U_n$ suit la loi du $\chi^2$ à $s$-1 degrés de liberté.**

On considère un algorithme générateur de nombres entiers aléatoires compris entre 1 et 4.
On utilise cet algorithme pour créer un échantillon de 10000 nombres compris entre 1 et 4. On obtient alors :
2602 fois le nombre 1
2534 fois le nombre 2
2422 fois le nombre 3
2442 fois le nombre 4.

On se propose de tester la fiabilité de cet algorithme par l'examen de l'échantillon précédent.
On fait l'hypothèse que le nombre (aléatoire) fourni par le générateur suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$.

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $0,95 = F_3(7,81)$ , où $F_3$ désigne la fonction de répartition de la loi du $\chi^2$ à 3 degrés de liberté,
- $\frac{1}{2500}\left(102^2 + 34^2 + 78^2 + 58^2\right) = 8,4032$ .

En introduisant des variables convenables $X_1, X_2, X_3, X_4$ et la variable $U_n$ associée, justifier le rejet de l'hypothèse de répartition uniforme des nombres fournis par le générateur.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1999

# HEC, ESCP-EAP, EM-LYON : MATH II

## CORRIGE

## PARTIE–I

## A. Etude des variables $X_i$

### QUESTION–1

On effectue $n$ tirages indépendants, avec remise ; à chaque tirage il y a deux issues possibles :

le succès, tirer une boule d'une couleur $C_i$ avec la probabilité $p_i$,

l'échec, tirer une boule d'une autre couleur avec la probabilité $1-p_i=q_i$ ;

$X_i$ indique le nombre de succès, donc

$$\boxed{\begin{array}{c} X_i \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}(n,p_i) \\ \forall k\in[\![0;n]\!],\ p(X_i=k)=\binom{n}{k}p_i^k q_i^{n-k}.\ E(X_i)=np_i \text{ et } V(X_i)=np_iq_i. \end{array}}$$

### QUESTION–2

Dans cette question, le schéma est le même que dans la question précédente ; le succès consiste à tirer une boule de couleur $C_i$ ou $C_j$ : la probabilité de succès est alors $p_i+p_j$

$$\boxed{\begin{array}{l} X_i+X_j \text{ suit la binomiale } \mathcal{B}(n,p_i+p_j)\ ; \\ V(X_i+X_j)=n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j). \end{array}}$$

D'autre part, $V(X_i+X_j)=V(X_i)+V(X_j)+2\operatorname{cov}(X_i,X_j)$, donc

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X_i,X_j) &= \frac{1}{2}\Big(V(X_i+X_j)-V(X_i)-V(X_j)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(n(p_i+p_j)(1-p_i-p_j)-np_i(1-p_i)-np_j(1-p_j)\Big) \\ &= \frac{n}{2}\Big(p_i+p_j-p_i^2-p_j^2-2p_ip_j-p_i+p_i^2-p_j+p_j^2\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{cov}(X_i,X_j)=-np_ip_j.}$$


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

**B. Dans cette partie, $s = 2$.**

### QUESTION–1

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} \\
&= \frac{(X_1 - np_1)^2 p_2 + (X_2 - np_2)^2 p_1}{np_1 p_2} \\
&= \frac{(X_1 - np_1)^2 p_2 + (n - X_1 - n(1-p_1))^2 p_1}{np_1 p_2} \\
&\quad \text{car } X_1 + X_2 = n \text{ et } p_1 + p_2 = 1 \\
&= \frac{(X_1 - np_1)^2 p_2 + (-X_1 + np_1)^2 p_1}{np_1 p_2} \\
&= \frac{(X_1 - np_1)^2 (p_1 + p_2)}{np_1 p_2} \quad \text{car } (-X_1 + np_1)^2 = (X_1 - np_1)^2 \\
&= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1 p_2} \quad \text{car } p_1 + p_2 = 1.
\end{aligned}$$

Donc, $U_n = Z_1^2$, avec $Z_1 = \dfrac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1 p_2}}$.

### QUESTION–2

La variable $X_1$ suit la loi binomiale de paramètres $n, p_1$ ; donc $E(X_1) = np_1$ et $V(X_1) = np_1(1-p_1) = np_1 p_2$. Il s'ensuit que $Z_1$ **est la variable centrée réduite associée à** $X_1$.

**D'après le théorème de la limite centrée, $Z_1$ converge en loi vers une variable qui suit la loi normale centrée réduite.**

- Rappelons le théorème de la limite centrée, théorème qui n'est pas fréquemment utilisé :

**Soit $(Y_k)$ pour $k \geq 1$, une suite de variables définies sur le même espace probabilisé $\Omega$, indépendantes, de même loi, possédant une espérance et une variance non nulle. Alors la variable centrée réduite associée à la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ converge en loi vers une variable $Y$ définie sur $\Omega$ qui suit la loi normale centrée réduite.**

Le théorème s'applique dans notre situation car $X_1$ peut être considérée comme la somme de $n$ variables de Bernoulli, de paramètre $p_1$, indépendantes, admettant une espérance $p_1$ et une variance **non nulle** $p_1 q_1$.

**C. On suppose ici que $s = 3$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$ et $p_3 = \frac{1}{2}$.**

### QUESTION–1

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} + \frac{(X_3 - np_3)^2}{np_3} \\
&= \frac{4(X_1 - \frac{n}{4})^2}{n} + \frac{4(X_2 - \frac{n}{4})^2}{n} + \frac{2(X_3 - \frac{n}{2})^2}{n}.
\end{aligned}$$


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.

$$\begin{aligned} Z_1^2+Z_2^2 &= \frac{4}{n}\Big(X_3-\frac{n}{2}\Big)^2+\frac{2}{n}\Big(X_1-X_2\Big)^2 \\ &= \underbrace{\frac{2}{n}\Big(X_1-X_2\Big)^2+\frac{2}{n}\Big(X_3-\frac{n}{2}\Big)^2}_{S_1}+\frac{2}{n}\Big(X_3-\frac{n}{2}\Big)^2. \quad \textbf{(1)} \end{aligned}$$

La somme $S_1$ des deux premiers termes vaut

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2}{n}\Big(X_1-X_2\Big)^2+\frac{2}{n}\Big(n-X_1-X_2-\frac{n}{2}\Big)^2 \\ &\quad \text{car } X_1+X_2+X_3=n \\ &= \frac{2}{n}\Big(X_1-X_2\Big)^2+\frac{2}{n}\Big(-X_1-X_2+\frac{n}{2}\Big)^2 \\ &= \frac{2}{n}\Big(X_1^2+X_2^2-2X_1X_2+X_1^2+X_2^2+\frac{n^2}{4}-nX_1-nX_2+2X_1X_2\Big) \\ &= \frac{2}{n}\Big(2X_1^2+2X_2^2+\frac{n^2}{4}-nX_1-nX_2\Big) \\ &= \frac{4}{n}\Big(X_1^2+X_2^2+\frac{n^2}{8}-\frac{n}{2}X_1-\frac{n}{2}X_2\Big) \\ &= \frac{4}{n}\Big(X_1^2-\frac{n}{2}X_1+\frac{n^2}{16}+X_2^2+\frac{n^2}{16}-\frac{n}{2}X_2\Big) \\ &= \frac{4}{n}\Big((X_1-\frac{n}{4})^2+(X_2-\frac{n}{4})^2\Big). \end{aligned}$$

Donc, en revenant à l'égalité **(1)**

$$Z_1^2+Z_2^2=\frac{4}{n}\Big(X_1-\frac{n}{4}\Big)^2+\frac{4}{n}\Big(X_2-\frac{n}{4}\Big)^2+\frac{2}{n}\Big(X_3-\frac{n}{2}\Big)^2.$$

$$\boxed{\text{On a bien : } U_n=Z_1^2+Z_2^2.}$$

## QUESTION–2

- Occupons-nous de $Z_1$.

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned} E(Z_1) &= E\Big(\frac{2}{\sqrt{n}}\Big(X_3-\frac{n}{2}\Big)\Big) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}}\Big(E(X_3)-\frac{n}{2}\Big) \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}}\Big(\frac{n}{2}-\frac{n}{2}\Big) \quad \text{car } X_3 \text{ suit la binomiale } \mathcal{B}(n,\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Z_1)=0.}$$

$$\begin{aligned} V(Z_1) &= \frac{4}{n}V(X_3-\frac{n}{2}) \quad \text{car } V(\lambda Z)=\lambda^2V(Z) \\ &= \frac{4}{n}V(X_3) \quad \text{car } V(Z+a)=V(Z) \\ &= \frac{4}{n}n\frac{1}{2}\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{V(Z_1)=1. \text{ La variable } Z_1 \text{ est centrée, réduite.}}$$

- Occupons-nous de $Z_2$.

$$\begin{aligned} V(Z_2) &= \sqrt{\frac{2}{n}}\Big(E(X_1)-E(X_2)\Big) \quad \text{par linéarité} \\ &= \sqrt{\frac{2}{n}}\Big(\frac{n}{4}-\frac{n}{4}\Big) \quad \text{puisque } X_1 \text{ et } X_2 \quad \text{suivent la binomiale } \mathcal{B}(n,\tfrac{1}{4}). \end{aligned}$$

$$\boxed{E(Z_2)=0.}$$


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 19 pages.