CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 12 Mai 1999, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE I

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'ensemble des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$ et I la matrice identité de $\mathbb{M}_4(\mathbb{R})$. On considère les matrices :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On désigne respectivement par φ et ψ les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ représentés par L et M dans la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$.

1. **a)** Montrer que φ et ψ sont des automorphismes de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer les automorphismes réciproques.

b) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme φ.

Déterminer de même les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ψ.

c) Montrer qu'on peut trouver un vecteur f_1 non nul de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $\varphi(f_1) = f_1$ et $\psi(f_1) = f_1$.

d) Déterminer, plus généralement, une base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de $\mathbb{R}^4$ dont chaque vecteur est à la fois un vecteur propre de φ et un vecteur propre de ψ. Donner la matrice L' de φ et la matrice M' de ψ dans cette base $\mathcal{F}$.

2. On se propose d'étudier l'ensemble C des endomorphismes γ de $\mathbb{R}^4$ vérifiant $\gamma \circ \varphi = \varphi \circ \gamma$ et $\gamma \circ \psi = \psi \circ \gamma$.

a) Montrer que C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ qui contient φ et ψ.

b) Montrer que si $\gamma \in C$ et $\gamma' \in C$, alors $\gamma \circ \gamma' \in C$.

c) Soit $\gamma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ et soit G la matrice de γ dans la base $\mathcal{F}$, constituée de vecteurs propres de φ et ψ, déterminée à la question 1.d). Montrer que $\gamma \in C$ si et seulement si G est une matrice diagonale.

d) En déduire que C est un sous-espace vectoriel de dimension 4 de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ et que les endomorphismes Id, φ, ψ et $\varphi \circ \psi$ forment une base de C.

EXERCICE II

On considère un entier naturel N supérieur ou égal à 3 et on note $\{1, 2, \ldots, N\}$ l'ensemble des entiers strictement positifs, inférieurs ou égaux à N.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On y effectue des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée après chaque tirage, jusqu'à obtenir pour la première fois un numéro déjà tiré. On note alors T_N le rang aléatoire de ce dernier tirage.

C'est ainsi, par exemple, que si on a obtenu successivement les numéros -1-5-4-7-3-5-, la variable T_N prend la valeur 6, alors que si on a obtenu -5-4-2-2- la variable T_N prend la valeur 4.

On admet qu'on définit ainsi une variable aléatoire sur un espace probabilisé dont la probabilité est notée $\mathbf{P}$. Toutes les variables aléatoires introduites dans le problème seront supposées définies sur cet espace. Si Z est une telle variable, son espérance sera notée $\mathrm{E}(Z)$ et sa variance $\mathrm{V}(Z)$.

N.B. *Les partie II et III sont indépendantes.*

I. Étude de la variable aléatoire T_N

1. Dans cette question, on se place dans le cas particulier où l'entier N est égal à 3.

Déterminer la loi de T_3 et calculer son espérance et sa variance.

2. On revient désormais au cas général où N est supérieur ou égal à 3.

a) Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre T_N.

b) Calculer $\mathbf{P}(T_N = 2)$, $\mathbf{P}(T_N = 3)$ et $\mathbf{P}(T_N = N+1)$.

c) Prouver, pour tout entier k de $\{1, 2, \ldots, N\}$, les égalités

$$\mathbf{P}(T_N > k) = \frac{N!}{(N-k)!\,N^k} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 - \frac{i}{N}\right).$$

En déduire la loi de la variable aléatoire T_N.

d) Déterminer, pour tout entier k fixé, la limite $\lim\limits_{N \to +\infty} \mathbf{P}(T_N > k)$. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

II. Étude d'un algorithme

Dans le programme Turbo-Pascal suivant, la fonction `RANDOM` renvoie, pour un argument M de type `INTEGER`, un nombre entier aléatoire de l'intervalle $[0\,,\, M-1]$.

```
PROGRAM simulation;
VAR
    T : ARRAY[1..20001] OF INTEGER;
    U, S, i, n :  INTEGER;
    coincide :  BOOLEAN;

PROCEDURE X;
    BEGIN
      RANDOMIZE;      { initialisation de la fonction RANDOM }
      FOR i:=1 TO 20001 DO T[i]:=1+RANDOM(20000);
    END;

BEGIN
    X;
    i:=1; coincide:=FALSE;
    REPEAT
        i:=i+1;
        S:=0;
        WHILE (S < i-1) AND NOT coincide DO
        BEGIN
            S:=S+1;
            IF T[S] = T[i] THEN coincide:=TRUE;
        END;
    UNTIL coincide=TRUE;
```

```
      U:=i;
      FOR n:=1 TO i DO WRITE(T[n],', ');
      WRITELN;
      WRITELN ('U = ' ,U);
      WRITELN ('S = ' ,S);
      READLN;
END.
```

a) Que fait la procédure X ?

b) Que représentent les variables U et S à la fin du programme ?

c) Pourquoi est-il certain que le nombre de passages dans la boucle «REPEAT ...UNTIL» est fini ?

III. Étude du comportement asymptotique de la suite $(T_N)_{n\geq 3}$

1. Une formule pour l'espérance de T_N.

a) Justifier l'égalité suivante : $\mathrm{E}(T_N)=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\mathrm{P}(T_N>k)$.

b) En déduire l'égalité $$\mathrm{E}(T_N)=\frac{N!}{N^N}\sum_{h=0}^{N}\frac{N^h}{h!}.$$

2. Un résultat utile sur les lois de Poisson.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Poisson indépendantes, de paramètre $\lambda=1$ et soit, pour tout entier $N\geq 1$, $Y_N=X_1+X_2+\cdots X_N$.

a) Montrer, par récurrence sur N, que la loi de Y_N est une loi de Poisson de paramètre N. Donner l'espérance et la variance de Y_N.

b) Justifier l'égalité
$$\lim_{N\to+\infty}\mathbf{P}\left(\frac{Y_N-N}{\sqrt{N}}\leq 0\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

c) En déduire l'égalité $$\lim_{N\to+\infty}\mathbf{P}(Y_N\leq N)=\frac{1}{2}.$$

3. En appliquant ce résultat, montrer que $\mathrm{E}(T_N)$ est équivalent à $\dfrac{1}{2}\dfrac{N!\,e^N}{N^N}$ quand N tend vers l'infini.

4. Une expression de la variance de T_N.

a) Montrer l'égalité $$\mathrm{E}(T_N^2)=\sum_{k=0}^{N}(2k+1)\mathbf{P}(T_N>k).$$

b) Établir la relation $$\sum_{k=0}^{N}k\mathbf{P}(T_N>k)=\frac{N!}{N^N}\sum_{h=0}^{N}(N-h)\frac{N^h}{h!}.$$

c) Montrer l'égalité $$\sum_{h=0}^{N}(N-h)\frac{N^h}{h!}=\frac{N^{N+1}}{N!}.$$

d) En déduire que la variance $\mathrm{V}(T_N)$ de T_N et son espérance vérifient la relation
$$\mathrm{V}(T_N)=2N+\mathrm{E}(T_N)-(\mathrm{E}(T_N))^2.$$

5. En admettant le résultat classique : $N!\sim N^Ne^{-N}\sqrt{2\pi N}$ quand N tend vers l'infini, donner, en conclusion, des équivalents simples de $\mathrm{E}(T_N)$ et $\mathrm{V}(T_N)$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1999

HEC : MATH III

CORRIGE

HEC MATH III

EXERCICE–I

QUESTION–1

1–a)

$(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4)) = (e_2, e_1, e_4, e_3)$ qui constitue une base de $\mathbb{R}^4$.
De même $(\psi(e_1), \psi(e_2), \psi(e_3), \psi(e_4)) = (e_3, e_4, e_1, e_2)$ qui constitue une base de $\mathbb{R}^4$.

> Les endomorphismes φ et ψ transforment une base de $\mathbb{R}^4$ en une base de $\mathbb{R}^4$: ce sont donc des automorphismes de $\mathbb{R}^4$. On vérifie sans peine que $L^2 = M^2 = I_4$, ce qui veut dire que $L^{-1} = L$ et $M^{-1} = M$: donc $\varphi^{-1} = \varphi$ et $\psi^{-1} = \psi$.

1–b)

L et M sont symétriques réelles, donc diagonalisables.

- Valeurs propres et sous-espaces propres de φ.

λ est valeur propre de φ si et seulement si la matrice $L - \lambda I$ n'est pas inversible.

$$L - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \longleftrightarrow L_1 \\ \\ L_4 \longleftrightarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \longleftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ \\ L_4 \longleftarrow L_4 + \lambda L_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

La matrice est triangulaire : elle n'est pas inversible si et seulement si l'un de ses termes diagonaux est nul :

> λ **est valeur propre de** φ **si et seulement si** $\lambda = 1$ **ou** $\lambda = -1$.

Notons $E_\lambda(\varphi)$ le sous-espace propre de φ associé à λ et $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$u \in E_1(\varphi) \iff \begin{cases} x - y &= 0 \\ z - t &= 0 \end{cases} \iff u = (x, x, z, z,) \ \ / \ (x, z) \in \mathbb{R}^2.$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

$$\boxed{\begin{array}{c} E_1(\varphi) = \text{vect}((1,1,0,0),(0,0,1,1))\ ; \\ \text{Les vecteurs } (1,1,0,0),(0,0,1,1) \text{ forment une famille libre (ils ne sont} \\ \text{pas proportionnels), ils constituent une base de } E_1(\varphi). \\ \dim E_1(\varphi) = 2. \end{array}}$$

$$u \in\ E_{-1}(\varphi) \iff \begin{cases} x+y & = 0 \\ z+t & = 0 \end{cases} \iff u = (x,-x,z,-z,)\ \ /\ (x,z) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\boxed{\begin{array}{c} E_{-1}(\varphi) = \text{vect}((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))\ ; \\ \text{Les vecteurs } (1,-1,0,0),(0,0,1,-1) \text{ forment une famille libre (ils ne} \\ \text{sont pas proportionnels), ils constituent une base de } E_{-1}(\varphi). \\ \dim E_{-1}(\varphi) = 2. \end{array}}$$

- <u>Valeurs propres et sous-espaces propres de ψ</u>.

λ est valeur propre de ψ si et seulement si la matrice $M - \lambda I$ n'est pas inversible.

$$M - \lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_4 \longleftarrow L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_2 \\ L_2 \longleftarrow L_4 \\ L_1 \longleftarrow L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\lambda & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \longleftarrow L_3 + \lambda L_2 \\ L_4 \longleftarrow L_4 + \lambda L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \end{pmatrix} \ L_4 \longleftrightarrow L_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Remarque : On aurait pu gagner une étape en effectuant

$L_3 \longleftrightarrow L_1,\ L_3 \longleftrightarrow L_1$, puis $L_4 \longleftarrow L_4 + \lambda L_2,\ L_3 \longleftarrow L_3 + \lambda L_1$.

On est dans la même situation que pour φ.

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } \psi \text{ si et seulement si } \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1.}$$

Notons $E_\lambda(\psi)$ le sous-espace propre de ψ associé à λ et $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$u \in E_1(\psi) \iff \begin{cases} x-z & = 0 \\ y-t & = 0 \end{cases} \iff u = (x,y,x,y,)\ \ /\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\boxed{E_1(\psi) = \text{vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1))\ ;\ \dim E_1(\psi) = 2.}$$

$$u \in E_{-1}(\psi) \iff \begin{cases} x+z & = 0 \\ y+t & = 0 \end{cases} \iff u = (x,y,-x,-y,)\ \ /\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\boxed{E_{-1}(\psi) = \text{vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1))\ ;\ \dim E_{-1}(\psi) = 2.}$$