ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1999

**Option économique**

# Mathématiques II

*Mardi 18 Mai 1999 de 8h à 12h*



*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*
*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

L'objectif de ce problème est l'étude de la modélisation de l'accroissement d'une population, tant par les naissances que par l'immigration.
Cette étude est effectuée dans la partie II, tandis que, dans la partie I, on établit des résultats préliminaires relatifs à la série géométrique et à ses applications en probabilités.

## Partie I

1°) Etude des séries dérivées de la série géométrique.

Dans toute cette question, on désigne par $x$ un nombre réel $x$ tel que $0 \leq x < 1$.

a) Calculer pour tout nombre entier naturel $n$ les deux sommes suivantes:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

b) Déterminer la limite de $x^n$, de $nx^n$, et des deux sommes précédentes quand $n$ tend vers $+\infty$.

*On admettra alors qu'il est licite, pour $0 \leq x < 1$, de dériver terme à terme l'égalité classique:*

$$\sum_{m=0}^{+\infty} x^m = \frac{1}{1-x}$$

*autrement dit que l'on a pour tout nombre entier naturel non nul $k$ la relation suivante (R):*

$$\sum_{m=k}^{+\infty} m(m-1)\dots(m-k+1)x^{m-k} = \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

c) Exprimer ainsi $1/(1-x)^3$ sous la forme de la somme d'une série.

d) Expliciter la dérivée $k^{ième}$ de la fonction $x \to 1/(1-x)$.

Effectuer dans la relation ($R$) le changement d'indice $n = m - k$ et déduire de ces résultats l'expression de $\sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+k}^{k} x^n$ en fonction de $k$ et $x$.

2°) Application à l'étude de la loi binomiale négative.

On considère dans cette question une suite d'épreuves de Bernoulli identiques, indépendantes et menant au succès avec la probabilité $p$ ($0 < p < 1$).

Pour tout nombre entier $k \geq 1$, on désigne par $X_k$ la variable aléatoire indiquant le numéro de l'épreuve où intervient le $k^{\text{ième}}$ succès (et $X_k$ prend donc des valeurs supérieures ou égales à $k$).

a) On suppose $k = 1$. Préciser la loi de $X_1$, la probabilité $P(X_1 = n+1)$ pour tout nombre entier naturel $n$ et l'espérance $E(X_1)$ de la variable aléatoire $X_1$.

b) On suppose $k > 1$. Déterminer la probabilité d'obtenir $k$-1 succès en $n+k$-1 épreuves, puis en déduire la probabilité $P(X_k = n+k)$ pour tout nombre entier naturel $n$.

c) A l'aide des résultats précédents, vérifier que la série $\Sigma P(X_k = n+k)$ a pour somme 1, puis calculer l'espérance $E(X_k)$ de la variable aléatoire $X_k$ en fonction de $p$ et $k$.

Comment peut-on interpréter ce dernier résultat?

*On dit alors que la variable aléatoire $X_k$ suit la loi binomiale négative de paramètres $p$ et $k$.*

## Partie II

On étudie dans cette partie la croissance d'une population au cours du temps. A cet effet, on introduit pour tout nombre réel positif $t$ la variable aléatoire $X(t)$ indiquant le nombre des individus de la population à l'instant $t$, et l'on suppose que l'on a $X(0) = k$, autrement dit que la population compte $k$ individus ($k \geq 0$) à l'instant initial $t = 0$.

1°) Croissance de la population par les naissances ($k > 0$).

On suppose dans cette question qu'il existe un nombre réel strictement positif $\lambda$ tel que l'on ait pour tout couple $(t, h)$ de nombres positifs avec $h > 0$ et pour tout nombre entier naturel $n$:

$P(X(t+h) < n+k \ / \ X(t) = n+k) = 0$ (où la notation $P(X(t+h) < n+k \ / \ X(t) = n+k)$ désigne la probabilité conditionnelle de l'événement "$X(t+h) < n+k$" sachant "$X(t) = n+k$").

$P(X(t+h) = n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = \lambda(n+k)h + h\varepsilon'_n(h)$

$P(X(t+h) > n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = h\varepsilon''_n(h)$

où $h \to \varepsilon'_n(h)$ et $h \to \varepsilon''_n(h)$ désignent deux fonctions de la variable $h$ (indépendantes de $t$) tendant vers 0 lorsque $h$ tend vers 0.

Ces hypothèses signifient que la population ne peut pas diminuer, que la probabilité pour qu'une naissance se produise pendant une courte durée $h$ est proportionnelle à cette durée $h$ et au nombre $n+k$ des individus présents à l'instant $t$, et qu'enfin la probabilité pour que plusieurs naissances se produisent pendant une courte durée $h$ est négligeable devant la probabilité d'une seule naissance.

On précisera dans ce contexte la probabilité $P(X(t+h) = n+k \ / \ X(t) = n+k)$.

a) Etablir à l'aide de la formule des probabilités totales le résultat suivant:

$$P(X(t+h) = k) = (1-\lambda kh)P(X(t) = k) + h\varepsilon_0(h)$$

où $h \to \varepsilon_0(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque $h$ tend vers 0.

En déduire que la fonction définie par $p_k(t) = P(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur **R**+ et que l'expression de sa dérivée à droite en $t$ est:

$$p'_k(t) = -\lambda k p_k(t).$$

*On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction $p_k$.*

b) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp(\lambda kt)p_k(t)$ puis, en tenant compte de la valeur de $p_k(0) = \mathrm{P}(X(0) = k)$, en déduire l'expression de $p_k(t)$ en fonction de $k$, $\lambda$ et $t$.

c) Etablir le résultat suivant pour $n \geq 1$:

$$\mathrm{P}(X(t+h) = n+k) = (1-\lambda(n+k)h)\mathrm{P}(X(t) = n+k) + \lambda(n+k-1)h\mathrm{P}(X(t) = n+k-1) + h\varepsilon_n(h)$$

où $h \to \varepsilon_n(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque $h$ tend vers 0.

En déduire que la fonction définie par $p_{n+k}(t) = \mathrm{P}(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur **R**+ pour $k \geq 1$ et que l'expression de sa dérivée à droite en $t$ est:

$$p'_{n+k}(t) = -\lambda(n+k)p_{n+k}(t) + \lambda(n+k-1)p_{n+k-1}(t).$$

*On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction $p_{n+k}$.*

d) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp(\lambda(n+k)t)p_{n+k}(t)$ et en déduire par récurrence sur $n$ le résultat suivant:

$$p_{n+k}(t) = P(X(t) = n+k) = C_{n+k-1}^{k-1} e^{-\lambda kt}(1-e^{-\lambda t})^n.$$

e) Reconnaître à l'aide des résultats de la partie I la loi de la variable aléatoire $X(t)$ et déterminer son espérance $\mathrm{E}(X(t))$ en fonction de $\lambda$, $k$ et $t$.

2°) Croissance de la population par l'immigration.

On suppose dans cette question qu'il existe un nombre réel strictement positif $\mu$ tel que l'on ait pour tout couple $(t, h)$ de nombres positifs avec $h > 0$ et pour tout nombre entier naturel $n$:

$$\mathrm{P}(X(t+h) < n+k \ / \ X(t) = n+k) = 0$$
$$\mathrm{P}(X(t+h) = n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = \mu h + h\varepsilon'_n(h)$$
$$\mathrm{P}(X(t+h) > n+k+1 \ / \ X(t) = n+k) = h\varepsilon''_n(h)$$

où $h \to \varepsilon'_n(h)$ et $h \to \varepsilon''_n(h)$ désignent deux fonctions de la variable $h$ (indépendantes de $t$) tendant vers 0 lorsque $h$ tend vers 0.

Ces hypothèses signifient que la population ne peut pas diminuer, que la probabilité d'arrivée d'un immigré pendant une courte durée $h$ est proportionnelle à cette durée $h$ (mais indépendante du nombre $n+k$ des individus déjà présents à l'instant $t$), et qu'enfin la probabilité d'arrivée de plusieurs immigrés pendant une courte durée $h$ est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul immigré.

On précisera dans ce contexte la probabilité $\mathrm{P}(X(t+h) = n+k \ / \ X(t) = n+k)$.

a) Etablir à l'aide de la formule des probabilités totales le résultat suivant:

$$\mathrm{P}(X(t+h) = k) = (1-\mu h)\mathrm{P}(X(t) = k) + h\varepsilon_0(h)$$

où $h \to \varepsilon_0(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque $h$ tend vers 0.

En déduire que la fonction définie par $q_k(t) = \mathrm{P}(X(t) = k)$ est dérivable à droite sur **R**+ et que l'expression de sa dérivée à droite en $t$ est:

$$q'_k(t) = -\mu q_k(t).$$

*On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction $q_k$.*

b) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp(\mu t)q_k(t)$ puis, en tenant compte de la valeur de $q_k(0) = \mathrm{P}(X(0) = k)$, en déduire l'expression de $q_k(t)$ en fonction de $\mu$ et $t$.

c) Etablir le résultat suivant pour $n \geq 1$:

$$\mathrm{P}(X(t+h) = n+k) = (1-\mu h)\mathrm{P}(X(t) = n+k) + \mu h\mathrm{P}(X(t) = n+k-1) + h\varepsilon_n(h)$$

où $h \to \varepsilon_n(h)$ désigne une fonction tendant vers 0 lorsque $h$ tend vers 0.

En déduire que la fonction définie par $q_{n+k}(t) = \mathrm{P}(X(t) = n+k)$ est dérivable à droite sur **R**+ pour $k \geq 1$ et que l'expression de sa dérivée à droite en $t$ est:

$$q'_{n+k}(t) = -\mu q_{n+k}(t) + \mu q_{n+k-1}(t).$$

*On admettra que cette formule est en fait valable pour la dérivée de la fonction $q_{n+k}$.*

d) Dériver la fonction définie sur **R**+ par $t \to \exp(\mu t)q_{n+k}(t)$ et en déduire $q_{n+k}(t)$ pour $n = 1, 2,$ et 3, puis dans le cas général.

e) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $X(t)-k$ et donner l'espérance $\mathrm{E}(X(t))$ en fonction de $\mu$, $k$ et $t$.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 1999

# ESSEC : MATH II

CORRIGE

## PARTIE–I

**1–a)**

$\sum_{k=0}^{n} x^k$ est la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison $x \neq 1$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad \text{formule valable pour } x=0 \text{ en posant } 0^0 = 1.}$$

**Etudions** $F(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

***Remarque*** : L'énoncé nous demande de nous restreindre à $x \in [0;1[$. Il est clair cependant que les résultats seront valables pour $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Cette somme n'a pas de sens si $n = 0$ ; nous supposerons $n \geq 1$.

Posons $\forall x \in [0;1[,\ Q(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

$Q$ est dérivable sur $[0;1[$ et $\forall x \in [0;1[, \quad Q'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = F(x)$.

Or pour $x \in [0;1[,\ Q(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, donc

$$\begin{aligned} \forall x \neq 1,\ Q'(x) &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in [0;1[,\ \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.}$$

**b)**

On sait que $x \in [0;1[$, donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x^n = 0.}$$

Si $x = 0$, $\lim_{n \to +\infty} nx^n = 0$, car $nx^n = 0$ dès que $n \geq 1$.

Si $x > 0$, $nx^n = ne^{n \ln x} = \dfrac{1}{\ln x}\left(n \ln x e^{n \ln x}\right)$.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE 

Or $\lim_{n\to+\infty} n\ln x = -\infty$, car $\ln x < 0$. Par croissance comparée, en posant éventuellement $X = n\ln x$, on a $\lim_{n\to+\infty}\left(n\ln x e^{n\ln x}\right) = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\left(n\ln x e^{n\ln x}\right) = 0$.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, } \forall x\in[0;1[,\ \lim_{n\to+\infty} nx^n = 0.}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} nx^{n+1} &= \lim_{n\to+\infty} nx^n x = 0\\ \lim_{n\to+\infty}(n+1)x^n &= \lim_{n\to+\infty}(nx^n + x^n) = 0.\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'en utilisant les résultats du 1−a),

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.}$$

**c)**

Rappelons que $\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \frac{d^k}{dx^k}f(x)$ veut dire dérivée $k$ ème de $f$ au point $x$. Dans ces conditions,

$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right)$, car $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$, donc

$$\boxed{\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}.}$$

**d)**

D'après l'égalité **(R)** de l'énoncé,

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{m=k}^{+\infty} m(m-1)\dots(m-k+1)x^{m-k}.$$

**Montrons par récurrence que**

$$\forall k\geq 1,\ \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

**Initialisation :** Le résultat est vrai pour $k=1$, puisque $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$.

**Hérédité :** Supposons qu'il existe un entier $k\geq 1$ tel que

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

$$\begin{aligned}\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\left(\frac{1}{1-x}\right) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right)\\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\right) \quad \text{(par hypothèse de récurrence)}\\ &= k!\frac{d}{dx}(1-x)^{-k-1}\\ &= k!(-k-1)(-1)(1-x)^{-k-1-1}\\ &= (k+1)!(1-x)^{-k-2}\\ &= \frac{(k+1)!}{(1-x)^{k+2}}.\end{aligned}$$

**En conclusion, par principe du raisonnement par récurrence,**

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0;1[,$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{m=k}^{+\infty} m(m-1)\dots(m-k+1)x^{m-k}.$$

En posant $n = m + k$, on obtient,

$$\begin{aligned}\sum_{m=k}^{+\infty} m(m-1)\dots(m-k+1)x^{m-k} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)x^n \\ &\text{on multiplie et on divise par } n! \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} k!\frac{(n+k)!}{n!k!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} k!\binom{n+k}{n}x^n.\end{aligned}$$

D'après le résultat encadré ci-dessus, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} k!\binom{n+k}{n}x^n = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$

En simplifiant par $k! \neq 0$, on a :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0;1[,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k}{n}x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.}$$

**QUESTION−2**

**a)**

$X_1$ est la variable aléatoire correspondant au temps d'attente du premier succès. $X_1$ suit donc la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ p(X_1 = n+1) = p(1-p)^n\ ;\ E(X_1) = \frac{1}{p}.}$$

**b)**

On effectue $n + k - 1$ épreuves de Bernoulli identiques, indépendantes et menant au succès avec la probabilité $p$. Notons $X_{n,k}$ la variable aléatoire indiquant le nombre de succès obtenus au cours de ces $n + k - 1$ épreuves : $X_{n,k} \hookrightarrow \mathcal{B}(n + k - 1, p)$.

$$\boxed{p(X_{n,k} = k-1) = \binom{n+k-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^n.}$$

L'événement $(X_k = n + k)$ signifie que l'on a obtenu $k - 1$ succès au cours des $n + k - 1$ épreuves et un succès à la $(n + k)$ ème épreuve. D'une manière générale notons $S_j$ l'événement " obtenir un succès à la $j$ ème épreuve " ; alors

$$(X_k = n + k) = (X_{n,k} = k - 1) \cap S_{n+k}.$$

Les deux événements $(X_{n,k} = k-1)$ et $S_{n+k}$ sont **indépendants** car les épreuves le sont, donc

$$\boxed{p(X_k = n+k) = \binom{n+k-1}{k-1}p^k(1-p)^n.}$$

**c)**

- Si $k \geq 2$, alors $k - 1 \geq 1$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(X_k = n+k) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{k-1}p^k(1-p)^n.$$

Utilisons les résultats du 1−d) avec $k - 1$ à la place de $k$ et $1 - p$ à la place de $x$ (ce qui est légitime car $0 \leq 1 - p < 1$). On trouve

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{k-1}(1-p)^n p^k &= p^k\frac{1}{\Big(1-(1-p)\Big)^{k-1+1}} \\ &= \frac{p^k}{p^k} = 1.\end{aligned}$$

- Si $k=1$, $X_1$ suit alors la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$ de paramètre $p$ et l'on a bien (c'est du cours) $\sum_{n=0}^{+\infty} p(X_1=n+k)=1$.

$$\boxed{\text{Conclusion : } \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{n=0}^{+\infty} p(X_k=n+k)=1.}$$

L'espérance $E(X_k)$ existe si et seulement si la série de terme général $(n+k)p(X_k=n+k)$ est **absolument convergente ; ici, tous les termes sont positifs ou nuls, la convergence suffit.**

$$\forall k \geq 1,\ \forall n \geq 0,\ (n+k)\binom{n+k-1}{k-1} = k\binom{n+k}{k}$$

**Se rappeler que** $\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ k\binom{N}{k} = N\binom{N-1}{k-1}$.

On est donc ramené à étudier la convergence de la série de terme général $k\binom{n+k}{k}(1-p)^n p^k$, ce qui se réduit à l'étude de la série de terme général $\binom{n+k}{k}(1-p)^n$ car $kp^k$ sont des constantes (la variable est $n$).

D'après 1–d) cette série converge (il suffit de remplacer $x$ par $1-p$) ; sa somme vaut $\dfrac{1}{\big(1-(1-p)\big)^{k+1}} = \dfrac{1}{p^{k+1}}$.

$$\boxed{E(X_k) \text{ existe et vaut } \frac{kp^k}{p^{k+1}} = \frac{k}{p} = kE(X_1).}$$

Il faut, en moyenne, $k$ fois plus de temps pour obtenir le $k$ éme succès que pour obtenir le premier.

## PARTIE–II

### QUESTION–1

**a)**

Calculons d'abord $p(X(t+h)=n+k/_{X(t)=n+k})$, c'est-à-dire aussi $p_{X(t)=n+k}(X(t+h)=n+k),\ n \in \mathbb{N}$.

La famille d'événements $\{(X(t+h)<n+k),\ (X(t+h)=n+k),$ $X(t+h)=n+k+1),\ X(t+h)>n+k+1)\}$ est un système complet d'événements.

Donc $p_{X(t)=n+k}(X(t+h)<n+k)+p_{X(t)=n+k}(X(t+h)=n+k)+$ $p_{X(t)=n+k}(X(t+h)=n+k+1)+p_{X(t)=n+k}(X(t+h)>n+k+1)=1$, **car** $p_{X(t)=n+k}$ **est une application probabilité.**

Or $p_{X(t)=n+k}(X(t+h)<n+k)=0$, car d'après l'énoncé on ne peut pas avoir $X(t+h)<n+k$ si l'on a $X(t)=n+k$. Ce qui donne toujours d'après l'énoncé : $p_{X(t)=n+k}(X(t+h)=n+k)+\lambda(n+k)h+h\varepsilon'_n(h)+h\varepsilon''_n(h)=1$.

$$\boxed{\begin{array}{c} p(X(t+h)=n+k/_{X(t)=n+k}) = 1-\lambda(n+k)h+h\varepsilon'''_n(h), \qquad \textbf{(1)} \\ \text{o } \varepsilon'''_n = -\varepsilon'_n - \varepsilon''_n, \qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon'''_n(h) = 0. \end{array}}$$

Rappelons que $k$ est le nombre d'individus au temps $t=0$. Donc