A 2007 PHYS. II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 2007

SECONDE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Filière PC

(Durée de l'épreuve : 4 heures)

L'usage de la calculatrice est autorisé

Sujet mis à disposition des concours : ENSAE (Statistique), ENSTIM, INT, TPE-EIVP, Cycle international

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

PHYSIQUE II -PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 7 pages.

- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il est invité à le signaler sur sa copie et à poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques qui vous sembleront pertinents. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.

Notations : Vecteur $\rightarrow \vec{\mathbf{A}}$; norme du vecteur $\vec{\mathbf{A}} \rightarrow A$ (italique) ou $\left\|\vec{\mathbf{A}}\right\|$; vecteur unitaire $\rightarrow \hat{\mathbf{a}}$.

Les différentes parties sont largement indépendantes entre elles. On trouvera page 6 le rappel de quelques notations standard et une banque de données utiles pour résoudre certaines questions.

Dans toute l'épreuve, ***exprimer*** signifie donner l'expression littérale et ***calculer*** signifie donner la valeur numérique.

PREMIÈRE PARTIE : ATOME HYDROGÉNOÏDE

Le modèle d'atome d'hydrogène proposé par Niels BOHR s'appuie principalement sur les axiomes suivants : dans un référentiel galiléen,

i) l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon r sur laquelle il ne rayonne pas,

ii) l'électron échange de l'énergie avec l'extérieur lorsqu'il change de trajectoire circulaire,

iii) *axiome de quantification* : $mvr = n\dfrac{h}{2\pi} = n\hbar$, où m et v désignent respectivement la masse et le module de la vitesse de l'électron, n un nombre entier naturel non nul et h la constante de Planck. À chaque valeur de l'entier n correspond une valeur du rayon r, de la vitesse v et de l'énergie, notées respectivement r_n, v_n et E_n.

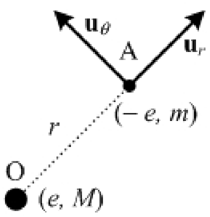

Fig. 1 : *Modèle planétaire de l'atome d'hydrogène.*

On considère (Fig. 1) un atome d'hydrogène constitué d'un proton (charge e, masse M) et d'un électron (charge $-e$, masse m). Le proton, situé en un point O, est supposé immobile ; l'électron, en A, est repéré par le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OA}} = r\hat{\mathbf{u}}_r$ dans le repère polaire $\left(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta\right)$ utilisé dans cette partie.

❑ **1** – Justifier l'unité de la constante h (J.s) qui figure dans le tableau de la page 7.

❑ **2** – Montrer que l'on peut négliger la force gravitationnelle devant la force électrostatique entre le proton et l'électron (la constante de la gravitation G peut s'estimer à partir de données, même approximativement connues).

❑ **3** – Établir que pour le mouvement circulaire de l'électron, $E_p + 2E_c = 0$, où E_c est l'énergie cinétique et E_p l'énergie potentielle (Théorème du viriel). Exprimer E_c de l'électron en fonction du rayon r de la trajectoire circulaire. Exprimer le rayon r_n en fonction de n et de r_1, correspondant à $n = 1$. En utilisant l'axiome de quantification, exprimer r_1 en fonction de ε_0, m, e et h. Calculer r_1.

❑ **4** – Calculer l'ordre de grandeur du champ électrique créé par le proton à la distance $r = r_1$. Comparer la valeur de ce champ électrique atomique à un champ électrique macroscopique, produit dans des conditions expérimentales que vous préciserez.

❑ **5** – En déduire l'énergie mécanique totale E de l'électron en fonction de n et des données ε_0, m, e et $\hbar$. L'origine des énergies pour l'électron correspond à l'état où l'électron est au repos à une distance infinie du proton. Écrire E sous la forme $E_n = \dfrac{E_1}{n^2}$ en précisant l'expression de E_1. Interpréter le signe de E_n. On appelle « état fondamental » de l'atome l'état d'énergie minimale. Montrer que cet état correspond à E_1. Calculer E_1 en électron-volt.

❑ **6** –Exprimer la vitesse v_n en fonction de n et de v_1. Exprimer v_1. Calculer v_1 Comparer sa valeur à celle de c, vitesse de la lumière dans le vide. Conclure.

Texte introductif aux questions 7 à 10

Dans les questions suivantes, l'électron a une énergie totale minimale, ce qui correspond à l'état fondamental de l'atome. On assimile le mouvement de l'électron à une boucle de courant.

❑ **7** – L'électron en mouvement sur sa trajectoire circulaire peut être assimilé à un courant électrique. Exprimer I l'intensité équivalente de la boucle de courant. Calculer I .

❑ **8** – Calculer $B(\mathrm{O})$, valeur du « champ $\vec{\mathbf{B}}$ » créé au centre O de la trajectoire par le mouvement de l'électron.

❑ **9** – Donner l'ordre de grandeur des champs magnétiques les plus intenses actuellement réalisables. Comparer cet ordre de grandeur à la valeur numérique obtenue à la question 8.

❑ **10** – Si le modèle de Bohr a permis d'expliquer certaines caractéristiques des spectres de l'atome d'hydrogène, ce modèle, qui s'appuie sur la mécanique de Newton, n'a pu expliquer l'ensemble des propriétés des atomes. Ces dernières s'interprètent dans le cadre de la mécanique quantique. Rappeler en quelques mots les conditions de validité de la mécanique classique.

DEUXIÈME PARTIE : ABSORPTION, DISPERSION

Un milieu gazeux monoatomique peu dense, linéaire, homogène et isotrope, contenant N électrons par unité de volume est soumis à une onde électromagnétique plane progressive harmonique (dans le domaine IR-UV), décrite par les deux vecteurs champs électrique $\vec{\mathbf{E}}$ et magnétique $\vec{\mathbf{B}}$

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0 \exp\left[i\left(\omega t - kz\right)\right] \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_0 \exp\left[i\left(\omega t - kz\right)\right].$$

Dans cette partie, le vecteur $\vec{\mathbf{r}}$ (= x, y, z) ne représente plus la position « instantanée » de l'électron (pour autant que cette notion ait un sens), mais son élongation moyenne par rapport au noyau ; pour un atome au repos, la position moyenne de l'électron est ainsi confondue avec celle du proton et l'on a

$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{0}}$. Le mouvement d'un électron représentatif est décrit par le modèle classique de *l'électron élastiquement lié*. En l'absence de rayonnement, l'équation du mouvement de cet électron est

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega_0^2\vec{\mathbf{r}} - e\left(\vec{\mathbf{E}} + \frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}\wedge\vec{\mathbf{B}}\right) - 2m\alpha\frac{\mathrm{d}\vec{\mathbf{r}}}{\mathrm{d}t}. \qquad [1]$$

On suppose que les constantes α et ω_0 sont identiques pour tous les électrons, avec

$$\frac{\alpha}{\omega_0} = 5{,}0\times 10^{-6} \quad \text{et} \quad \lambda_0 = 2\pi\frac{c}{\omega_0} = 0{,}83\times 10^{-6}\,\mathrm{m}.$$

❑ **11** – Quelle est la signification physique du terme $-m\omega_0^2\vec{\mathbf{r}}$?

❑ **12** – Quelles sont, dans ce modèle d'oscillateur, la dimension et la signification physique de α ?

❑ **13** – En les validant par des considérations d'ordre de grandeur, d'une part sur *B*, d'autre part sur $\exp(-ikz)$, proposer deux simplifications de l'équation non linéaire [1]. La simplification relative au terme $\exp(-ikz)$ rend cette équation linéaire.

❑ **14** – Compte tenu des simplifications de la question précédente calculer en régime permanent l'amplitude complexe $\underline{r}_0$ du vecteur $\underline{\vec{\mathbf{r}}}(t)$ et celle du dipôle induit $\underline{\vec{\mathbf{p}}}$. Exprimer l'amplitude $\underline{P}_0$ du vecteur polarisation $\underline{\vec{\mathbf{P}}}$, et la susceptibilité diélectrique $\underline{\chi}$, définie par $\underline{P}_0(\omega) = \varepsilon_0\underline{\chi}(\omega)\underline{E}_0(\omega)$.

❑ **15** – Dans l'équation de Maxwell relative à un milieu non magnétique $\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{\mathbf{B}}) = \mu_0\vec{\mathbf{J}} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{\mathbf{E}}}{\partial t}$, $\vec{\mathbf{J}}$ est le courant total, somme du courant de conduction et du courant de déplacement $\underline{\vec{\mathbf{J}}_d} = \dfrac{\partial\vec{\mathbf{P}}}{\partial t}$. Établir alors que, en l'absence de courant de conduction, $\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\underline{\vec{\mathbf{B}}}) = \varepsilon_0\mu_0(1+\underline{\chi})\dfrac{\partial\underline{\vec{\mathbf{E}}}}{\partial t} = \varepsilon_0\mu_0\underline{\varepsilon_r}\dfrac{\partial\underline{\vec{\mathbf{E}}}}{\partial t}$. Cette équation définit la permittivité diélectrique relative $\underline{\varepsilon_r}(\omega) = \varepsilon'(\omega) - i\varepsilon''(\omega)$. Exprimer $\varepsilon'(\omega)$ et $\varepsilon''(\omega)$. Tracer sommairement les courbes correspondantes. On posera $\omega_p^2 = Ne^2/m\varepsilon_0$.

❑ **16** – Dans l'équation $\mathrm{div}(\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}}) = \rho$, ρ représente la densité volumique de charge totale, $\rho = \rho_{\text{libre}} + \rho_{\text{lié}} = \rho_{\text{libre}} - \mathrm{div}(\vec{\mathbf{P}})$. Établir que, en l'absence de charges libres, $\mathrm{div}(\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}) = 0$.

❑ **17** – Le milieu considéré étant dépourvu de charges et de courants libres, déterminer l'équation de propagation vérifiée par le champ $\vec{\mathbf{E}}$ dans le milieu[1]. Remarquer que, avec ce formalisme, k est complexe, $k = k' + ik''$ et déterminer la relation de dispersion $\mathrm{k}(\omega)$. On suppose $\varepsilon'(\omega) - 1 << 1$ et $\varepsilon''(\omega) << 1$. Établir, en fonction de $\varepsilon'(\omega), \varepsilon''(\omega)$, ω et c, des expressions simplifiées de la partie réelle k' et de la partie imaginaire k'' de k. Identifier le terme de dispersion et celui d'absorption. Comment introduire la notion d'indice complexe ?

---

[1] Pour tout vecteur $\vec{\mathbf{V}}$ suffisamment différentiable, $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\left[\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\vec{\mathbf{V}})\right] = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\left[\mathrm{div}(\vec{\mathbf{V}})\right] - \vec{\Delta}\vec{\mathbf{V}}$.

Texte introductif aux questions 18 à 21

Le modèle de l'électron élastiquement lié ne rend pas compte de l'ensemble des phénomènes observés ; il faut utiliser la mécanique quantique et la physique statistique … dont aucune connaissance n'est nécessaire pour traiter ce qui suit. Admettons seulement que :

Les atomes peuvent passer d'un état d'énergie E_1 à un état d'énergie supérieure E_2 par absorption d'un photon de pulsation $\omega_0 = 2\pi \frac{E_2 - E_1}{h}$. Lorsque le milieu est dit être en équilibre thermique à la température T, les nombres d'atomes par unité de volume N_1 et N_2 d'énergies respectives E_1 et E_2 satisfont la relation de Boltzmann $\frac{N_2}{N_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right)$. On prendra $T = 300\,\mathrm{K}$.

❑ **18** –L'expression quantique complexe de ε_r est $\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{e^2}{2m\varepsilon_0} \frac{(N_1 - N_2) f}{\omega_0(\omega_0 - \omega + i\alpha)}$, où f est un réel positif nommé *force d'oscillateur*. Quelle est la dimension de f ?

❑ **19** – Quel est, à l'équilibre thermique, le signe de $N_1 - N_2$? Justifier, sans calculs détaillés, que dans ce cas le milieu est absorbant.

❑ **20** – Dans un laser, on réalise, en régime permanent, l'inégalité $N_2 > N_1$; justifier le nom d'inversion *de population* donné à cette situation. Que se passe-t-il lors de la propagation d'une onde électromagnétique dans ce milieu ? LASER est l'acronyme de la traduction anglaise de « Amplification de lumière par émission stimulée de radiation » ; justifier cette appellation.

❑ **21** – Quelles caractéristiques présentent les lasers par rapport aux autres sources de lumière ? Citez des utilisations du laser autres que la réalisation d'expériences au lycée.

TROISIÈME PARTIE : LAME POLARISANTE

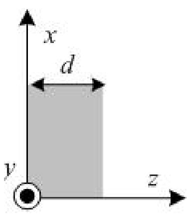

Fig. 2 : Lame diélectrique

Une lame diélectrique à faces planes et parallèles, d'épaisseur d, est placée dans l'air, assimilé ici au vide (Fig. 2). L'une des faces, représentée par le plan xOy, est abordée par une onde électromagnétique transversale dont le champ électrique s'écrit $\vec{\mathbf{E}} = E_x(x,y,z,t)\,\hat{\mathbf{u}}_x + E_y(x,y,z,t)\,\hat{\mathbf{u}}_y$. Le diélectrique est homogène, linéaire, transparent, non magnétique, dépourvu de charges et de courants libres, mais il présente une anisotropie. Cette anisotropie se manifeste par une polarisation du diélectrique différente suivant les axes x et y. En régime harmonique, cela se traduit par les relations suivantes entre les composantes du vecteur polarisation $\underline{\vec{\mathbf{P}}}$ et du vecteur champ électrique $\underline{\vec{\mathbf{E}}}$:

$$\underline{P}_x = \varepsilon_0(\varepsilon_{rx} - 1)\underline{E}_x \text{ et } \underline{P}_y = \varepsilon_0(\varepsilon_{ry} - 1)\underline{E}_y.$$

On pose ci-dessous $\varepsilon_1 = \varepsilon_0\varepsilon_{rx}$ et $\varepsilon_2 = \varepsilon_0\varepsilon_{ry}$, avec $\varepsilon_{ry} > \varepsilon_{rx}$. Il résulte de la question la question **15** que $\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\underline{\vec{\mathbf{B}}}) = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\underline{\vec{\mathbf{E}}} + \underline{\vec{\mathbf{P}}})$ et il résulte de la question la question **16** que $\mathrm{div}(\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{P}}) = 0$.

❑ **22** – Établir une équation différentielle faisant intervenir les vecteurs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{P}}$, et eux seulement ; attention, cette équation fait intervenir $\mathrm{div}(\vec{\mathbf{E}})$, qui n'est pas nul.

❑ **23** – Établir la relation entre $\frac{\partial E_x}{\partial x}$ et $\frac{\partial E_y}{\partial y}$, qui fait intervenir ε_1 et ε_2. En déduire que l'équation de propagation vérifiée par E_x est $\Delta E_x - \left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_1 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$.

❑ **24** – Écrire l'équation de propagation vérifiée par E_y. Que devient cette équation si le diélectrique est isotrope ?

❑ **25** – On considère à partir d'ici que les composantes du champ électrique s'écrivent

$$\underline{E_x}(z,t) = \underline{E_{0x}} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c_1}\right)\right] \quad \text{et} \quad \underline{E_y}(z,t) = \underline{E_{0y}} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{z}{c_2}\right)\right].$$

Les amplitudes complexes $\underline{E_{0x}}$ et $\underline{E_{0y}}$ sont constantes. En utilisant les résultats de la question précédente, exprimer les constantes c_1 et c_2 en fonction des paramètres du milieu.

Texte introductif aux questions 26 à 28

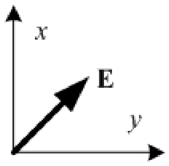

Fig. 3 : Champ électrique de l'onde incidente en z = 0.

Une onde plane progressive harmonique polarisée rectilignement suivant la bissectrice intérieure des axes (Ox, Oy) aborde le diélectrique sur sa face $z = 0$, en incidence normale (Fig. 3). On néglige toute réflexion de l'onde ; cette dernière est donc intégralement transmise. La valeur maximale de la norme du champ électrique de l'onde incidente est notée E_0.

❑ **26** – Donner les expressions des composantes $\underline{E_x}$ et $\underline{E_y}$ du champ dans le plan $z = 0$.

❑ **27** – Exprimer, pour $z = d$, le déphasage entre les composantes du champ dans le diélectrique. Quelle valeur minimale de d (notée $d_{\min}$) faut-il utiliser si l'on veut obtenir une onde polarisée circulairement à la sortie du diélectrique ?

On pose $c_1 = c_0 + (1/2)\delta c = c/n_1$ et $c_2 = c_0 - (1/2)\delta c = c/n_2$ $(\delta c << c_0)$, avec $n_1 = n_0 - \frac{1}{2}\delta n$ et $n_2 = n_0 + \frac{1}{2}\delta n$. Calculer $\delta n / n_0$ pour $d_{\min} = 5$ mm et $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = 5 \times 10^{-6}$ m.

❑ **28** – Citez des applications possibles d'un tel dispositif.

QUATRIÈME PARTIE : INTERFÉROMÈTRE

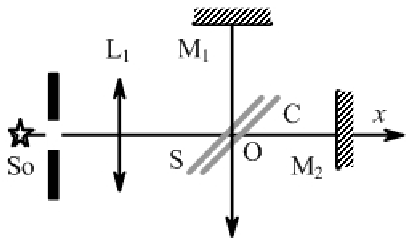

Fig. 4 : Interféromètre de Michelson.

Un interféromètre de Michelson (fig. 4) est initialement réglé en différence de marche $OM_1 - OM_2 = e$ non nulle, $e = 1{,}0$ cm. Le miroir M_1 et l'image du miroir M_2 à travers la séparatrice S sont parallèles. La compensatrice C et la séparatrice sont parallèles et à 45° de l'axe O*x*. L'éclairement est monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 0{,}597 \times 10^{-6}$ m. La source So est assimilable à un disque de rayon $a = 1$ mm d'axe O*x* placé dans le plan focal d'une lentille convergente L_1 de distance focale image $f_1' = 0{,}3$ m.

❑ **29** – Quels sont les rôles de la séparatrice et de la compensatrice ? Quelles sont les caractéristiques communes et particulières de la compensatrice et de la séparatrice ?

❑ **30** – L'observation du phénomène utilise une lentille convergente (de focale image $f_2' = 1{,}5$ m, par exemple). Décrire le dispositif d'observation et le phénomène observable avec une source étendue. Exprimer et calculer, à une unité près, le nombre de motifs observables ayant une intensité lumineuse minimale.

Texte introductif aux questions 31 et 32

La source est une source de lumière naturelle, non polarisée. On place entre le miroir M_1 et l'ensemble CS un polariseur P_1 perpendiculaire aux faisceaux lumineux aller et retour et dont l'axe de polarisation est perpendiculaire au plan de la figure 4. On fait de même entre le miroir M_2 et l'ensemble CS dans les mêmes conditions géométriques relatives avec un polariseur P_2. On raisonnera pour les aspects liés à la polarisation en supposant la source quasi ponctuelle et l'écran éclairé uniformément ; on négligera l'influence de l'ensemble CS sur la polarisation des ondes.

❑ **31** – Décrire les modifications éventuelles du phénomène par rapport à la question 30.

❑ **32** – On fait pivoter lentement l'axe du polariseur P_2 jusqu'à ce qu'il se situe dans le plan de la figure 4. Décrire sans aucun calcul les modifications éventuelles du phénomène.

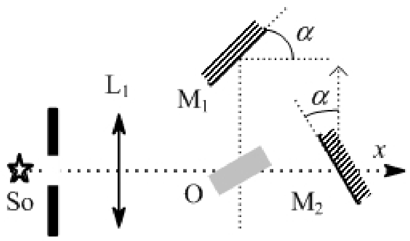

Fig. 5 : Montage modifié ; les deux miroirs restent orthogonaux. La partie grisée représente l'ensemble séparatrice compensatrice CS .

Texte introductif aux questions 33 à 36

Le montage de la Fig. 4 est modifié : on enlève le dispositif d'observation et les polariseurs. Les miroirs M_1 et M_2 sont inclinés du même angle α (Fig. 5) ; on place au foyer objet F_1 de la lentille L_1 $\left(f_1' = 0{,}3\ \mathrm{m}\right)$ une source ponctuelle de lumière monochromatique $\left(\lambda_0 = 0{,}597 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}\right)$.

❑ **33** – En considérant le modèle optique équivalent de l'interféromètre de Michelson, représenter la marche d'un rayon lumineux.

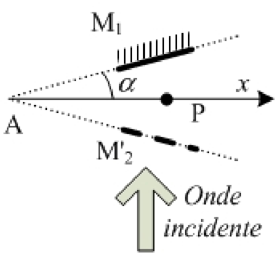

Fig. 6 : Schéma équivalent de l'interféromètre (partiel).

❑ **34** – Soit A un point de la droite définie par l'intersection de M_1 et de M_2', image de M_2 à travers CS (Fig. 6). Soit P un point du plan bissecteur de M_1 et de M_2', tel que $\overrightarrow{\mathbf{AP}} = x\,\hat{\mathbf{u}}_x$. Au point P, exprimer la différence de marche $\delta(x)$ entre les ondes réfléchies sous la forme $\delta(x) = x\,\mathrm{f}\left[\tan(\alpha)\right]$, où f est une fonction à déterminer. On rappelle qu'on associe un chemin optique négatif à un trajet virtuel opposé au sens de propagation de la lumière. On pourra, éventuellement, avoir recours à l'identité $1 + \dfrac{1}{\cos(2\alpha)} = \dfrac{2}{1 - \tan^2(\alpha)}$.

❑ **35** – Exprimer l'intensité $I(x)$ de la lumière émergente en fonction des intensités I_1 et I_2 de chaque onde réfléchie et de l'abscisse x du point P. On ne demande pas de démontrer la formule générale des interférences à deux ondes.

❑ **36** – On souhaite photographier le phénomène ; comment doit-on placer et mettre au point un appareil photographique par rapport au dispositif ? On assimilera l'appareil photographique à une lentille convergente. Quelle (s) application (s) voyez-vous de l'expérience précédente ?

Données numériques (toutes ne sont pas données avec la même précision)

Masse de l'électron	$m = 0{,}911 \times 10^{-30}$ kg
Charge du proton	$e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C
Constante de Planck	$h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J.s
Constante de Boltzmann	$k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J.K^{-1}
Rapport des masses proton/électron	$\dfrac{M}{m} = 1836$
Perméabilité magnétique du vide	$\mu_0 = 1{,}26 \times 10^{-6}$ H.m^{-1}
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m.s^{-1}
Permittivité diélectrique du vide	$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}
Champ électrique d'ionisation de l'air	$E_{\text{disruptif}} \approx 10^{6}$ V.m^{-1}

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE

Mines PC II 2007

Première partie : atome hydrogénoïde

1) Si σ_{oz} = mvr est le moment cinétique scalaire de l'électron, $\sigma_{oz}w = mw^2r^2$ est homogène à une énergie, donc σ_{oz} s'exprime en Js, comme $\hbar$.

2) $$\boxed{\frac{F_G}{F_e} = \frac{GMm \text{ x } 4\,\Pi\,\varepsilon_0}{e^2}}$$

<u>A.N.</u> : $\frac{F_G}{F_e} = 5\ 10^{-40} << 1$

3) * Par application de la relation fondamentale de la dynamique à l'électron, en projection sur $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, on obtient :

$$\begin{cases} -mr\dot{\theta}^2 = \dfrac{-e^2}{4\,\Pi\,\varepsilon_0\,r^2} = -\dfrac{K}{r^2} \\ mr\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \qquad \boxed{K = \frac{+e^2}{4\,\Pi\,\varepsilon_0}}$$

Ainsi : $$\dot{\theta} = \text{cste} = \sqrt{\frac{K}{mr^3}}$$

$$v = r\dot{\theta} = \sqrt{\frac{K}{mr}}$$

Puis : $$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{K}{2\,r}}$$

* $E_p = \int -F(r)\,dr = -\dfrac{K}{r}$

On obtient donc bien : $$\boxed{E_p + 2\,E_c = 0}$$

(Donc $E_m = -E_c = -\dfrac{K}{2\,r} < 0$, état « lié »).

* On a : $$\begin{cases} mv_nr_n = n\hbar \\ v_n = \left(\dfrac{K}{mr_n}\right) \end{cases}$$