



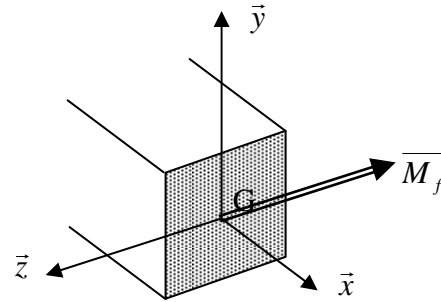
**RESISTANCE DES MATERIAUX
FLEXION PLANE SIMPLE**

1. DEFINITION

1.1. Flexion pure

Le système de forces extérieures appliquées à la poutre doit pouvoir se mettre sous forme **COPLANAIRE** dans un plan confondu avec un plan de symétrie de la poutre.

Le torseur de cohésion de la section doit pouvoir se réduire à un moment de flexion suivant un des axes de symétrie de la section droite (\vec{z} ci-contre)

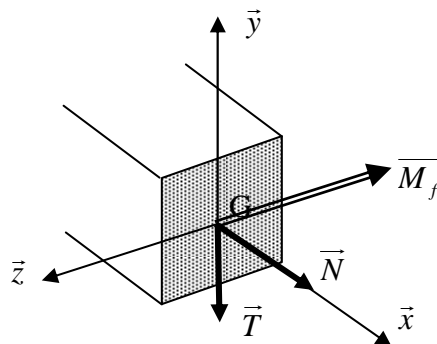


$$\text{Soit : } \{T_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

1.2. Flexion plane

Le système de forces extérieures appliquées à la poutre doit pouvoir se mettre sous forme **COPLANAIRE** dans un plan confondu avec un plan de symétrie de la poutre.

Si le plan des forces est (G, \vec{x}, \vec{y}) , le torseur de cohésion de la section en flexion plane doit pouvoir se mettre sous la forme :

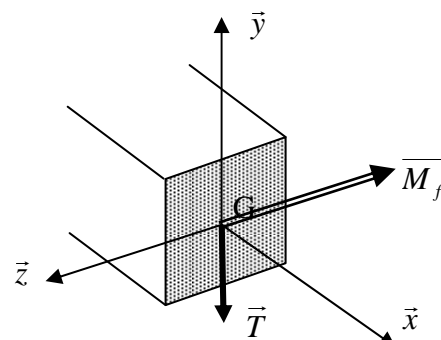


$$\text{Soit : } \{T_{coh}\}_G = \begin{pmatrix} N & 0 \\ T & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

1.3. Flexion plane simple

La ligne moyenne de la poutre est droite.

Le système de forces extérieures appliquées à la poutre doit pouvoir se mettre sous forme **COPLANAIRE** dans un plan confondu avec un plan de symétrie de la poutre. Toutes les forces sont **perpendiculaires à la ligne moyenne de la poutre**



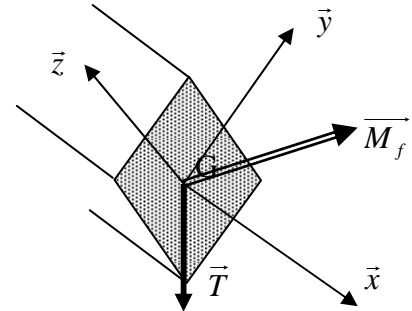
Si les forces sont suivant \vec{y} et la ligne moyenne suivant \vec{x} le torseur de cohésion de la section en flexion plane doit pouvoir se mettre sous la forme :

$$\text{Soit : } \{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

1.4. Flexion déviée (pour information car Hors Programme)

La ligne moyenne de la poutre est droite.

Le système de forces extérieures appliquées à la poutre doit pouvoir se mettre sous forme **COPLANAIRE** dans un plan qui n'est plus confondu avec un plan de symétrie de la poutre. Toutes les forces sont perpendiculaires à la ligne moyenne de la poutre



Le torseur de cohésion de la section droite de normale \vec{x} , sollicitée en flexion déviée est de la forme :

$$\text{Soit : } \{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

2. MODELISATION ET SYMBOLE DES ACTIONS MECANIQUES

Les poutres sont bien sûr en liaison avec d'autres solides et on adopte pour les différents types de liaison des symboles propres à la RdM ainsi que la plupart du temps une modélisation plane des actions mécaniques.

Les symboles usuels ainsi que leur modélisation sont regroupés dans le tableau ci-dessous :

Type	Exemples de liaison	Schématisation usuelle	Action mécanique de liaison	Torseur associé
Appui simple	Liaisons sphère cylindre ou sphère plan			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Articulation	Liaison pivot ou sphérique			$\begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$
Encastrement	Liaison encastrement			$\begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & M \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Exemple : Cas des arbres guidés en rotation par des roulements :

- Pour les roulements montés serrés et arrêtés axialement, la modélisation est alors une rotule, c'est à dire une sphérique.

Le fait que toutes les forces soient dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) revient à adopter la modélisation :

$${}_A \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \text{ ce qui devient dans le plan } (\vec{x}, \vec{y}) : {}_A \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ \cancel{F_z} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = {}_A \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})},$$

soit la même forme qu'une pivot d'axe $(A\vec{z})$ dans la plan (\vec{x}, \vec{y}) :

$${}_A \begin{Bmatrix} F_x & \cancel{M_x} \\ F_y & \cancel{M_y} \\ \cancel{F_z} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = {}_A \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Soit : Sphérique = Pivot = Articulation en RdM

- Pour les roulements montés glissants et non arrêtés axialement, la modélisation est alors une linéaire annulaire, c'est à dire une sphère - cylindre.

Le fait que toutes les forces soient dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) revient à adopter la modélisation :

Sphère cylindre de direction \vec{x} : ${}_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$, ce qui devient dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) :

$${}_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ \cancel{F_z} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = {}_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \text{ soit la même forme qu'une ponctuelle (sphère plan) de}$$

normale (A, \vec{y}) dans la plan (\vec{x}, \vec{y}) : ${}_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Soit : Sphère - Cylindre = Sphère - plan = Appui simple en RdM

3. ETUDE EXPERIMENTALE

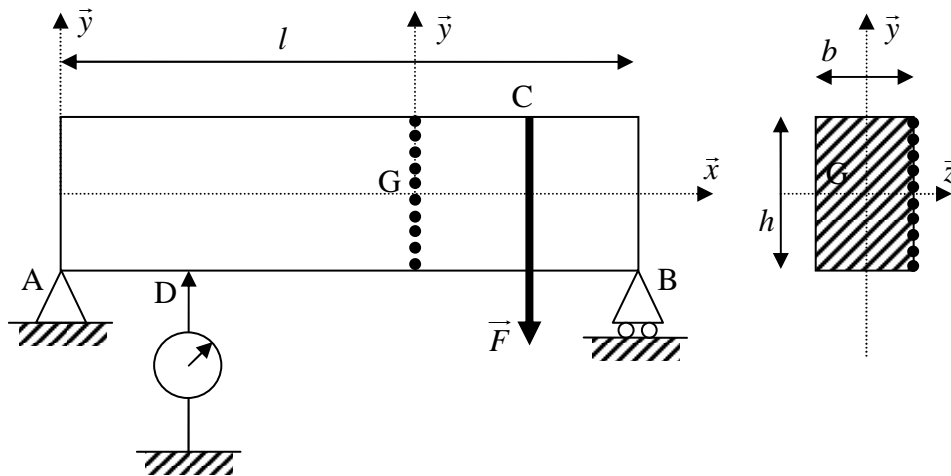
3.1. Essai

On sollicite une poutre en flexion plane simple : voir le protocole ci-dessous.

On mesure les déformations relatives $\frac{\Delta l}{l} = \epsilon$ sur le coté d'une section droite à l'aide de

jauges de contraintes et la loi de HOOKE ($\sigma = E\epsilon$) permet ensuite de relier les déformations mesurée aux contraintes s'exerçant dans la poutre.

On place en plus un comparateur en D afin de mesurer la flèche de la poutre



3.2. Résultats expérimentaux

Constatations sur la flèche (déplacement vertical) en D :

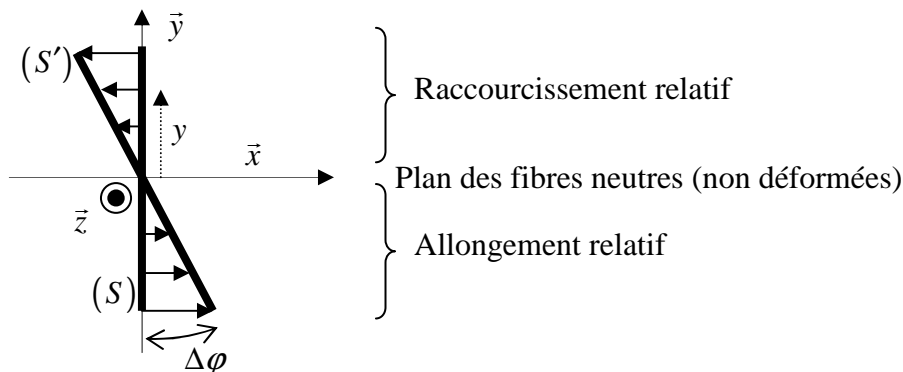
- La flèche en D est proportionnelle à l'intensité de la force exercée F. Elle augmente lorsque l'on éloigne C (point d'application de cette force) des appuis A et B de la poutre et est maximale lorsque C est au milieu de AB.
- La Flèche en D diminue si l'on remplace la force concentrée F en C par une action mécanique répartie modélisable par le même torseur d'action mécanique que la force

concentrée :

$$c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

- La flèche en D est inversement proportionnelle au moment quadratique $I_{G\bar{z}}$. Il faut pour cela procéder à plusieurs essais avec des poutres où seule la quantité b est changée. (En effet, pour une poutre à section rectangulaire, $I_{G\bar{z}} = \frac{bh^3}{12}$)

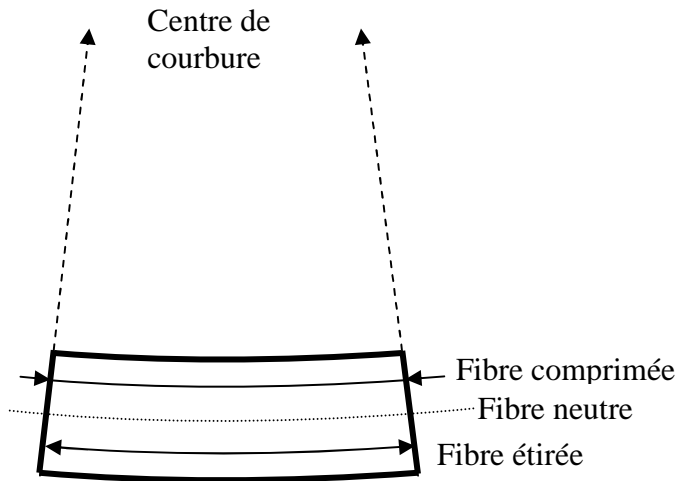
Etude des déformations longitudinales $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ données par les jauges de déformations :



Tout se passe comme si la section droite avait pivotée d'un angle $\Delta\varphi$

Filière MP, PSI, PT

- Les fibres au dessus de la ligne moyenne sont ici comprimées
- Les fibres en dessous de la ligne moyenne sont ici étirées
- Les fibres s'allongent ou se raccourcissent proportionnellement à leur distance par rapport à la ligne moyenne.
- La ligne moyenne est la fibre neutre



On en conclut donc que $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = ky$

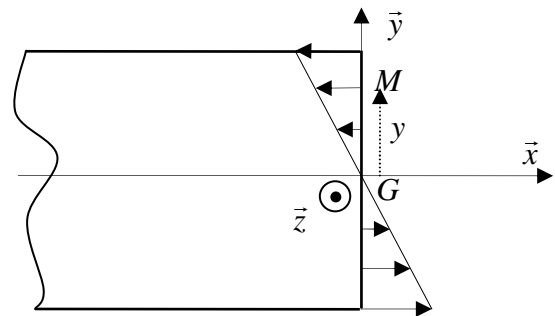
4. REPARTITION DES CONTRAINTES

4.1. Contraintes normales

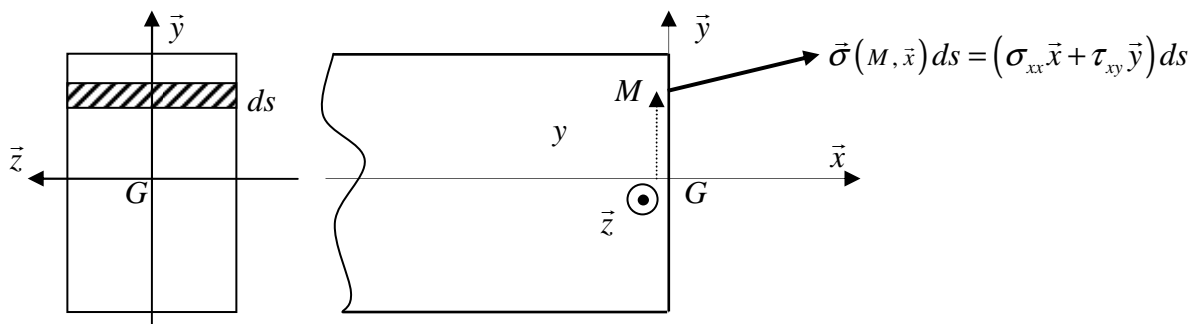
On vient de voir que $\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_x = ky$, or d'après la loi de HOOKE reliant déformations et contrainte, on sait que $\sigma_x = E\varepsilon_x$, le champ des contraintes est donc linéaire en y : $\sigma_x = kEy$

Les contraintes normales sont donc proportionnelles à leur distance par rapport au plan contenant les fibres moyennes, qui dans le cas de la flexion plane sont aussi les fibres neutres :

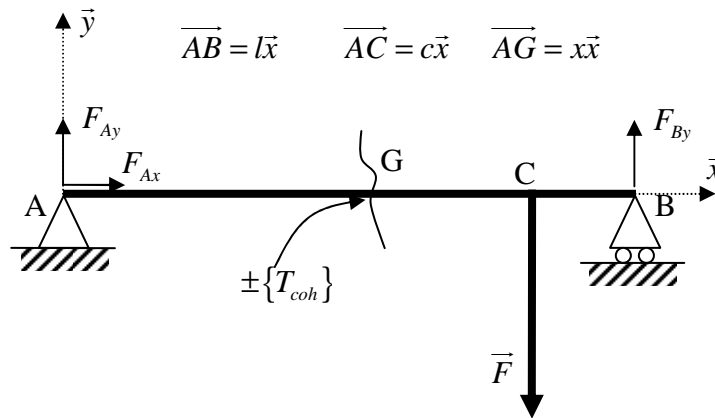
$\sigma_x = 0$, pas de contraintes normales pour $y = 0$, plan des fibres moyennes.



4.2. Relation entre σ_x et M_{fz}



La poutre étant en flexion plane simple :



Calcul des réactions aux appuis :

L'équilibre de la poutre en A s'écrit :

$$\begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{matrix} F_{Ax} & 0 \\ F_{Ay} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} \end{matrix} + \begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ F_{By} & 0 \\ 0 & lF_{By} \end{matrix} \right\} \end{matrix} + \begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -cF \end{matrix} \right\} \end{matrix} = \begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

Ce qui se résout en

$$\begin{cases} F_{Ax} = 0 \\ F_{Ay} = \frac{(l-c)F}{l} \\ F_{By} = \frac{cF}{l} \end{cases}$$

Calcul du torseur de cohésion :

Tronçon AC :

Si l'on conserve la partie gauche, l'équilibre de cette partie droite s'écrit :

$$\begin{matrix} G \\ \left\{ \begin{matrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{matrix} \right\} \end{matrix} + \begin{matrix} G \\ \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ \frac{(l-c)F}{l} & 0 \\ 0 & -x \frac{(l-c)F}{l} \end{matrix} \right\} \end{matrix} = \begin{matrix} G \\ \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} \end{matrix}$$

Soit :

$$\begin{matrix} G \\ \left\{ \begin{matrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{matrix} \right\} \end{matrix} = \begin{matrix} G \\ \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ -\frac{(l-c)F}{l} & 0 \\ 0 & x \frac{(l-c)F}{l} \end{matrix} \right\} \end{matrix}, \text{ ce qui est bien de la forme}$$

$$\begin{matrix} G \\ \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{matrix} \right\} \end{matrix} \text{ donc un cas de flexion plane simple.}$$

Tronçon CB :

Si l'on conserve la partie droite, l'équilibre de cette partie droite s'écrit :

$$- \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_G + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{cF}{l} & 0 \\ 0 & (l-x)\frac{cF}{l} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

Soit : $\begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{cF}{l} & 0 \\ 0 & (l-x)\frac{cF}{l} \end{Bmatrix}_G$, ce qui est bien de la forme

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G \text{ donc bien un cas de flexion plane simple.}$$

Le torseur de cohésion est donc bien de la forme $\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} \bar{R}_{coh} \\ \bar{M}_{coh} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$, soit

$$\bar{R}_{coh} = T_y \bar{y} \text{ et } \bar{M}_{coh} = M_{fz} \bar{z}$$

Or le torseur de cohésion n'étant ni plus ni moins que l'intégrale sur toute la section droite des efforts surfacique de cohésion, $d\vec{f}_M = \vec{\sigma}(M, \vec{x}) ds = (\sigma_{xx}\vec{x} + \tau_{xy}\vec{y}) ds$:

Ce qui donne pour la résultante du torseur de cohésion :

$$\bar{R}_{coh} = T_y \bar{y} = \int_{\forall M \in S} \vec{\sigma}(M, \vec{x}) ds = \int_{\forall M \in S} (\sigma_{xx}\vec{x} + \tau_{xy}\vec{y}) ds . \text{ Etant donné que l'on a choisi } ds = b dy , \text{ on}$$

obtient :

$$\text{En projection sur } \bar{x} : 0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} b dy = b k E \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y dy = b k E \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = 0 . \text{ On constate donc bien}$$

que le champ de contrainte normale observé sur l'essai (proportionnel à y) est conforme à la forme du torseur de cohésion !!!

$$\text{En projection sur } \bar{y} : T_y = \int \tau_{xy} ds .$$

Et pour le moment du torseur de cohésion :

$$\bar{M}_{coh} = M_{fz} \bar{z} = \int_{\forall M \in S} \overbrace{GM} \wedge \vec{\sigma}(M, \vec{x}) ds = \int_{\forall M \in S} (y\bar{y} + z\bar{z}) \wedge (\sigma_{xx}\vec{x} + \tau_{xy}\vec{y}) ds . \text{ Avec ici } ds = dy dz , \text{ on}$$

$$\text{obtient : } M_{fz} \bar{z} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (-y\sigma_{xx}\bar{z} - z\tau_{xy}\bar{x} + z\sigma_{xx}\bar{y}) dy dz$$