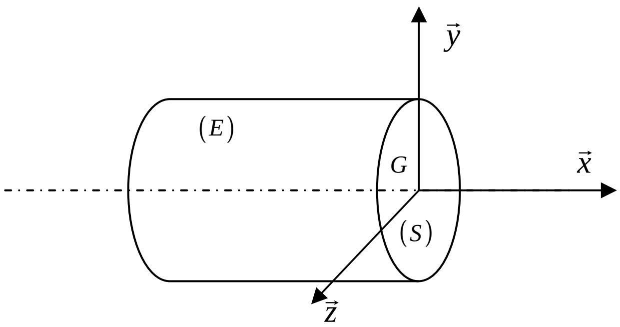
RESISTANCE DES MATERIAUX TORSION SIMPLE

1. DEFINITION

La section droite (S) est sollicitée en torsion lorsque le torseur de cohésion de la section droite est de la forme :

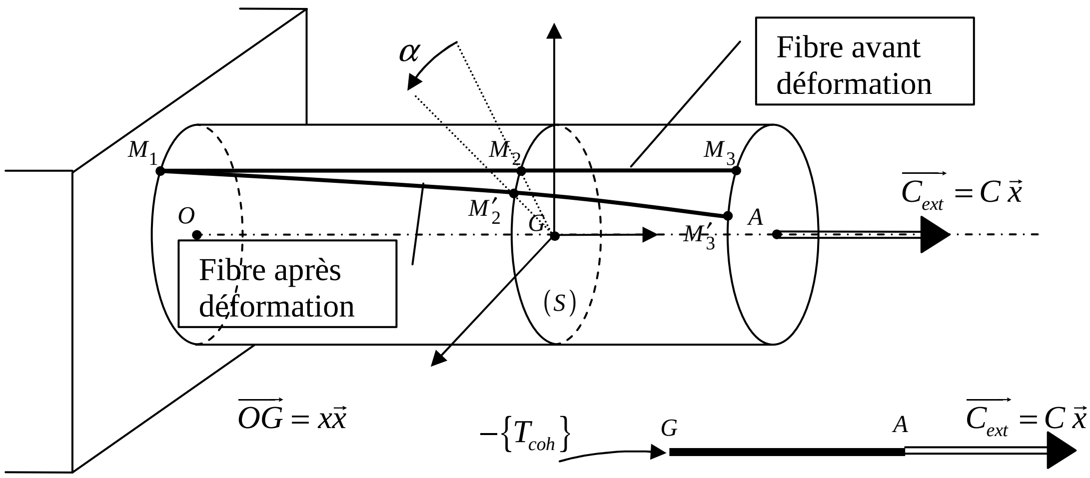
$$\{T_{cohésion}\} = {}_G\begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_{(\vec{x};\vec{y};\vec{z})} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x};\vec{y};\vec{z})}$$



Avec $\vec{x}$ normale extérieure à la section droite (S).

2. ETUDE EXPERIMENTALE DES DEFORMATIONS

On soumet une barre cylindrique encastrée à son extrémité gauche O, à un couple suivant son axe à l'autre extrémité A.



Le calcul du torseur de cohésion, en conservant la partie droite en G, permet de constater :

$$-{}_G\begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix} + {}_G\begin{Bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix},\ \{T_{coh}\} = {}_G\begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & C \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

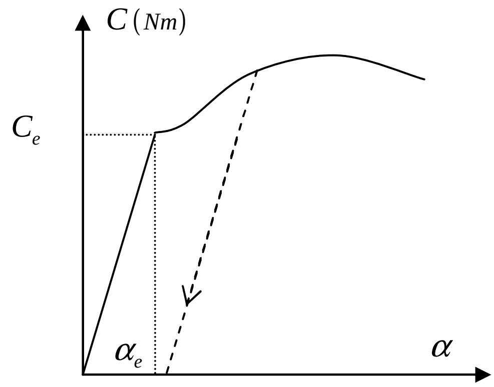
que l'on a bien une poutre sollicitée en torsion.

On fait croître C à partir de 0 Nm et on mesure les déformations, on constate :

- Les sections droites normales à la ligne moyenne avant déformations restent normales (planes = hypothèse de RdM) après déformations.
- La distance entre 2 sections droites ne change pas.

- Le déplacement d'une section droite correspond à une rotation d'un angle α autour de la ligne moyenne.

On relève la courbe ci-contre :



Zone élastique :

Partie linéaire, jusqu'à la valeur C_e :
α est proportionnel au couple appliqué C. Dans cette zone, si on annule le couple extérieur, la déformation disparaît.

Zone plastique :

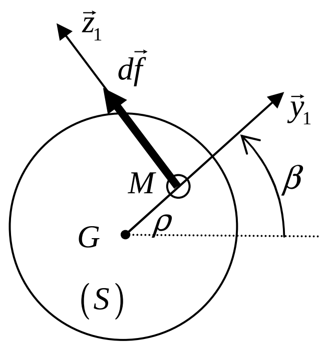
Au delà de la partie linéaire, la déformation augmente encore et si on annule le couple appliqué C, il reste une déformation permanente

L'essai se termine par la rupture à l'extrémité droite de la courbe.

Angle unitaire de torsion :

Dans le domaine élastique, on note θ la déformation angulaire relative : $\boxed{\theta = \dfrac{\alpha(x)}{x}}$

3. CONTRAINTES



La théorie de l'élasticité permet de montrer que la contrainte est tangentielle
Si, à l'intérieure de la section droite (vue ci-contre) , la contrainte est en plus tangentielle et constante pour ρ constant, on peut montrer que ce champ de contrainte est conforme au torseur de cohésion trouvé précédemment :
Pour cela il faut intégrer le champ de contrainte sur l'ensemble de la section droite, ce qui donne :

$d\vec{f} = \vec{C}(M,\vec{x})\,ds = \tau(\rho)\,\vec{z}_1 ds$

Soit : $\overrightarrow{R_{coh}} = \int_0^{2\pi}\int_0^r d\vec{f} = \int_0^{2\pi}\int_0^r \tau(\rho)\,\vec{z}_1 ds = \int_0^{2\pi}\int_0^r \tau(\rho)(-\sin\beta\vec{y} + \cos\beta\vec{z})\,\rho d\rho d\beta$

Or $\int_0^{2\pi} \sin\beta d\beta = \int_0^{2\pi}\cos\beta d\beta = 0$, d'où $\overrightarrow{R_{coh}} = \vec{0}$

De plus

$$\overrightarrow{M_{coh}} = \int_0^{2\pi}\int_0^r \overrightarrow{GM}\wedge d\vec{f} = \int_0^{2\pi}\int_0^r \rho\vec{y}_1 \wedge \tau(\rho)\,\vec{z}_1 ds = \int_0^{2\pi}\int_0^r \rho\tau(\rho)\,\vec{x}\rho d\rho d\beta = 2\pi\vec{x}\left[\int_0^r \rho^2\tau(\rho)\,d\rho\right]$$

Soit $M_{fy} = M_{fz} = 0$

