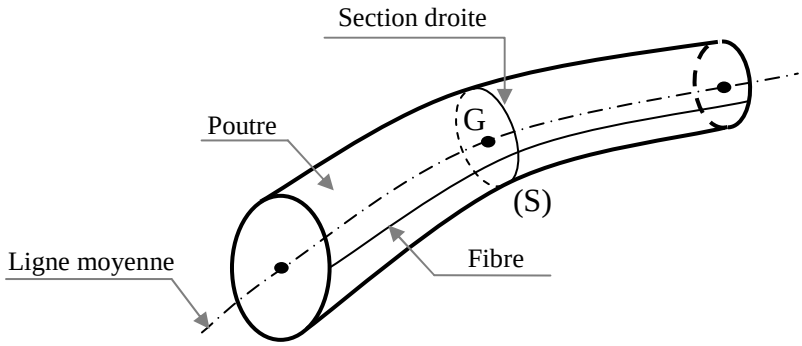
RESISTANCE DES MATERIAUX
THEORIE DES POUTRES

1. POUTRES

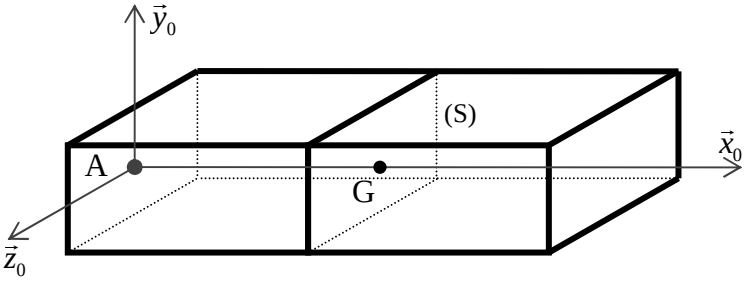
On appelle poutre, un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre d'inertie G décrit une courbe appelée ligne ou fibre moyenne :



La ligne moyenne est droite pour les poutres droites, elle est très élancée, c'est-à-dire qu'elle possède une **grande longueur par rapport à ses dimensions transversales**.
La surface plane (S) est appelée **section droite**.

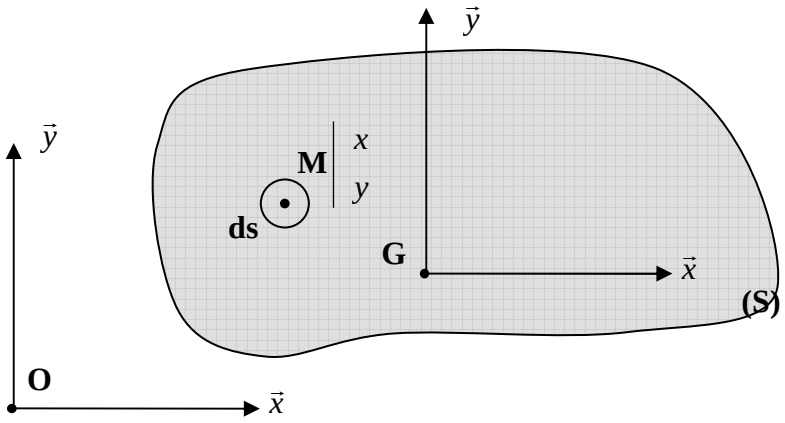
Supposons que la poutre (E) ait une ligne moyenne droite : cas particulier (fréquent) des poutres droites
Soit $R_0\left(A,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0\right)$ un repère lié à la poutre.

Ce repère est choisi de telle sorte que la normale à la section droite (S) soit $\vec{x}_0$, ce qui correspond aussi à la direction de la ligne moyenne.
Ce repère est appelé repère de position.
On repère une section droite (S) de la poutre (E) par la quantité :
$\overrightarrow{AG} = x\vec{x}_0$



2. CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS DROITES

Soit la section droite définie dans le plan $\left(\vec{x},\vec{y}\right)$ représentée ci-contre



Emmanuel FARGES
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

2.1 Moment statique d'une surface par rapport à un axe de son plan

Le moment statique de la section droite (S) par rapport :

- A l'axe $(O,\vec{x})$, noté $W(O\vec{x})$ est la quantité : $W(O\vec{x}) = \iint_{\forall M\in S} y\,ds$
- A l'axe $(O,\vec{y})$, noté $W(O\vec{y})$ est la quantité : $W(O\vec{y}) = \iint_{\forall M\in S} x\,ds$

2.2 Centre de gravité d'une surface

Comme pour n'importe quelle entité géométrique, le centre de gravité de la surface qu'est la section droite est définie par ses coordonnées :

- $x_G = \frac{1}{S}\iint_{\forall M\in S} x\,ds$
- $y_G = \frac{1}{S}\iint_{\forall M\in S} y\,ds$

On peut en déduire les deux relations avec le moment statique :

$$W(O\vec{y}) = S\,x_G \qquad \text{et} \qquad W(O\vec{x}) = S\,y_G$$

2.3 Moment quadratique d'une surface par rapport à un axe de son plan

Le moment quadratique de la section droite (S) par rapport à un axe de son plan est la quantité :

- Par rapport à l'axe $(O,\vec{x})$, noté $I_{O\vec{x}}$ est la quantité : $\boxed{I_{O\vec{x}} = \iint_{\forall M\in S} y^2\,ds}$
- Par rapport à l'axe $(O,\vec{y})$, noté $I_{O\vec{y}}$ est la quantité : $\boxed{I_{O\vec{y}} = \iint_{\forall M\in S} x^2\,ds}$

C'est ni plus ni moins que le moment d'inertie de la section droite par rapport à l'axe considéré.

Théorème de HUYGENS appliqué à la surface (S) :
On peut donc par analogie avec la démonstration faite dans le cours de cinétique, donner le théorème de HUYGENS appliqué à la surface que constitue une section droite :

$$\boxed{I_{O\vec{x}} = I_{G\vec{x}} + S\,y_G^2} \qquad \text{et} \qquad \boxed{I_{O\vec{y}} = I_{G\vec{y}} + S\,x_G^2}$$

2.4 Moment quadratique polaire d'une surface par rapport à un point de son plan

Le moment quadratique de la section droite (S) par rapport à un point O de son plan est la quantité noté I_O telle que : $I_O = \iint_{\forall M\in S}\left(x^2+y^2\right)ds = \iint_{\forall M\in S}\rho^2\,ds$

Avec $\rho = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$

C'est ni plus ni moins que le moment d'inertie de la section droite par rapport au point considéré.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

Propriété : $\boxed{I_O = I_{O\vec{x}} + I_{O\vec{y}}}$

2.5 Moment produit d'une surface par rapport aux axes de son plan

Le moment produit de la section droite (S) par rapport à 2 axes orthogonaux de son plan est la quantité noté $I_{O\vec{x}\vec{y}}$ telle que : $I_{O\vec{x}\vec{y}} = \iint_{\forall M \in S} xy\, ds$

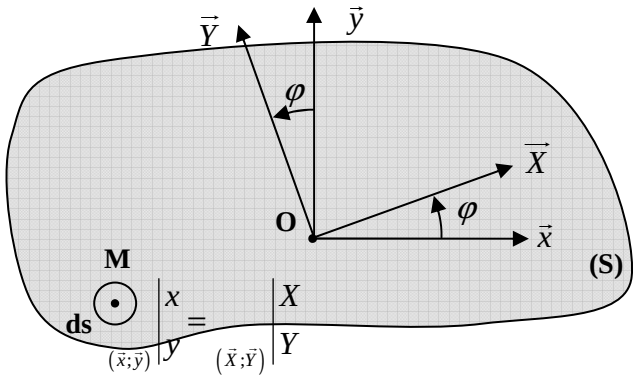
C'est ni plus ni moins que le moment produit de la section droite par rapport au 2 axes orthogonaux considéré.

Théorème de HUYGENS appliqué à la surface (S) :
On peut donc par analogie avec la démonstration faite dans le cours de cinétique, donner le théorème de HUYGENS appliqué à la surface que constitue une section droite :

$$\boxed{I_{O\vec{x}\vec{y}} = I_{G\vec{x}\vec{y}} + S\, x_G y_G}$$

2.6 Moment quadratique d'une surface par rapport aux axes de son plan

On définit deux systèmes d'axes (minuscules et majuscules) sur la figure ci-contre :



Cherchons à déterminer des relations entre les moments quadratiques et les moments produits dans les deux systèmes d'axes :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{x} + y\vec{y} = X\vec{X} + Y\vec{Y}$$

Ce qui donne les projections suivantes :

$$\begin{cases} \vec{X} = \cos\varphi\, \vec{x} + \sin\varphi\, \vec{y} \\ \vec{Y} = -\sin\varphi\, \vec{x} + \cos\varphi\, \vec{y} \end{cases}, \text{ d'où : } \begin{cases} X = \cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y \\ Y = -\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y \end{cases}$$

On rappelle les définitions des différents moments :

$I_{OX} = \iint Y^2 ds$, $I_{OY} = \iint X^2 ds$, $I_{OXY} = \iint XY ds$.

$I_{Ox} = \iint y^2 ds$, $I_{Oy} = \iint x^2 ds$, $I_{Oxy} = \iint xy ds$.

En développant les calculs, on obtient :

- $I_{OX} = \iint (-\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y)^2 ds = \sin^2\varphi \underbrace{\iint x^2 ds}_{I_{Oy}} - \underbrace{2\cos\varphi\sin\varphi}_{\sin 2\varphi} \underbrace{\iint xy ds}_{I_{Oxy}} + \cos^2\varphi \underbrace{\iint y^2 ds}_{I_{Ox}}$

  Soit : $I_{OX} = I_{Oy}\sin^2\varphi - I_{Oxy}\sin 2\varphi + I_{Ox}\cos^2\varphi$

- $I_{OY} = \iint (\cos\varphi\, x + \sin\varphi y)^2 ds = \cos^2\varphi \underbrace{\iint x^2 ds}_{I_{Oy}} + \underbrace{2\cos\varphi\sin\varphi}_{\sin 2\varphi} \underbrace{\iint xy ds}_{I_{Oxy}} + \sin^2\varphi \underbrace{\iint y^2 ds}_{I_{Ox}}$

  Soit : $I_{OY} = I_{Oy}\cos^2\varphi + I_{Oxy}\sin 2\varphi + I_{Ox}\sin^2\varphi$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

- $I_{OXY} = \iint (-\sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y)(\cos\varphi\, x + \sin\varphi\, y)\, ds$

$$I_{OXY} = -\cos\varphi\sin\varphi \underbrace{\iint x^2 ds}_{I_{Oy}} + \underbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}_{\cos 2\varphi} \underbrace{\iint xy ds}_{I_{Oxy}} + \sin\varphi\cos\varphi \underbrace{\iint y^2 ds}_{I_{Ox}}$$

$$= -\frac{\sin 2\varphi}{2} I_{Oy} + I_{Oxy}\cos 2\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} I_{Ox}$$

Soit : $I_{OXY} = -\frac{\sin 2\varphi}{2} I_{Oy} + I_{Oxy}\cos 2\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2} I_{Ox}$

En utilisant les relations trigonométriques : $\begin{cases} \sin^2\varphi = \dfrac{1-\cos 2\varphi}{2} \\ \cos^2\varphi = \dfrac{1+\cos 2\varphi}{2} \end{cases}$

On a les trois relations :

$$\boxed{\begin{aligned} I_{OX} &= \left(\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}\right) + \left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)\cos 2\varphi - I_{Oxy}\sin 2\varphi \\ I_{OY} &= \left(\frac{I_{Ox}+I_{Oy}}{2}\right) - \left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)\cos 2\varphi + I_{Oxy}\sin 2\varphi \\ I_{OXY} &= \left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)\sin 2\varphi + I_{Oxy}\cos 2\varphi \end{aligned}}$$

Ces relations permettent en fait de déterminer les axes principaux de la section droite (S)

2.7 Axes principaux

$\left(O\vec{X}\right)$ et $\left(O\vec{Y}\right)$ sont des axes principaux si le moment produit de la sections droite par rapport à ces deux axes (forcément orthogonaux) est nul : $I_{OXY} = \left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)\sin 2\varphi + I_{Oxy}\cos 2\varphi = 0$

Le système d'axes principaux est donc défini par son angle φ avec le système d'axe du référentiel par la relation :

$\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)\sin 2\varphi + I_{Oxy}\cos 2\varphi = 0$, soit $\boxed{\tan 2\varphi = -\frac{2I_{Oxy}}{I_{Ox}-I_{Oy}}}$

Remarque :

En calculant les dérivées partielles des moments quadratiques par rapport à l'angle φ :

$$\frac{d(I_{OX})}{d\varphi} = -2\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)\sin 2\varphi - 2I_{Oxy}\cos 2\varphi = -2\cos 2\varphi \underbrace{\left[\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\tan 2\varphi + I_{Oxy}\right]}_{0 \text{ d'après la relation trouvée précédemment}} = 0$$

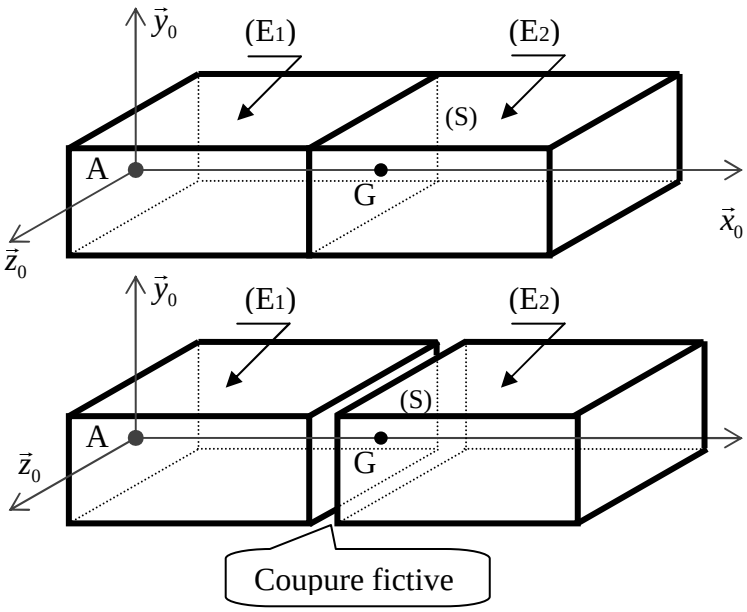
$$\frac{d(I_{OY})}{d\varphi} = 2\left(\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\right)\sin 2\varphi + 2I_{Oxy}\cos 2\varphi = 2\cos 2\varphi \underbrace{\left[\frac{I_{Ox}-I_{Oy}}{2}\tan 2\varphi + I_{Oxy}\right]}_{0 \text{ d'après la relation trouvée précédemment}} = 0$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

On montre que le ***moment quadratique des axes principaux est extremum (maximum pour l'un et minimum pour l'autre***.

3. COUPURE

La coupure fictive par le plan de la section droite (S) de centre d'inertie G partage la poutre (E) en deux tronçons (E_1) et (E_2).
On convient d'appeler (E_1) le tronçon à gauche de la section droite (par rapport au sens de $\vec{x}_0$) et (E_2) le tronçon à droite de la section droite (par rapport au sens de $\vec{x}_0$)



4. EQUILIBRE DE LA POUTRE

Une poutre (E) peut être soumise à :

- Des actions mécaniques à distance telles que son poids propre
- Des actions mécaniques de liaisons (on parle en RdM de **réactions aux appuis**)
- Des efforts extérieurs concentrés ou répartis

Tout problème de RdM commence par la détermination des réactions aux appuis. Pour cela il « suffit » d'écrire l'équilibre de la poutre. C'est un problème de statique !!!

$$\begin{cases} \vec{R}\left(\overline{E} \to E\right) = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_A}\left(\overline{E} \to E\right) = \vec{0} \end{cases} \quad \forall A \in \text{ espace}$$

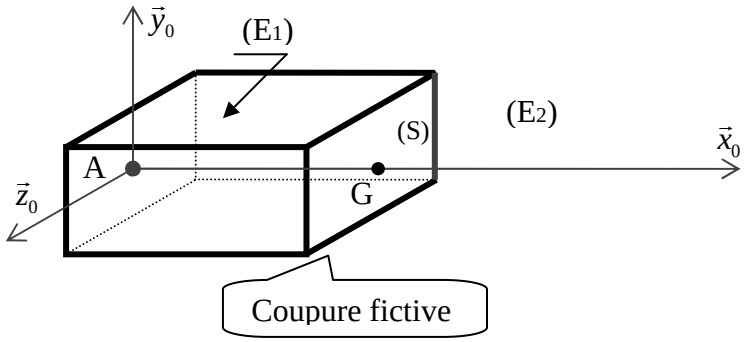
Cela donne les réactions aux appuis uniquement si la poutre est dite isostatique, c'est-à-dire si l'on a autant d'équations que d'inconnues de liaisons. Lorsque la poutre est hyperstatique (moins d'équations que d'inconnues de liaisons), on verra comment « lever » l'hyperstatisme en rajoutant des équations (issues de conditions sur la forme de la poutre déformée).

5. EQUILIBRE D'UN TRONÇON – TORSEUR DE COHESION

5.1 Torseur de cohésion

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

On utilise la notion de coupure, et on écrit l'équilibre (problème de statique) de la partie gauche (E1) par exemple :



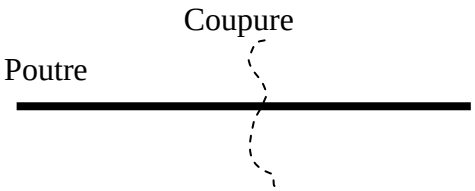
$\left\{T\left(\overline{E_1}\to E_1\right)\right\}=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$ avec $E=E_1\cup E_2$ donc $\overline{E_1}=\overline{E}\cup E_2$. On en déduit en G :

$$\underbrace{{}_G\left\{T\left(\overline{E}\to E_1\right)\right\}}_{\text{actions mécaniques extérieures}}+\underbrace{{}_G\left\{T\left(E_2\to E_1\right)\right\}}_{\text{actions mécaniques de la partie droite sur la partie gauche}}={}_G\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

Définitions :

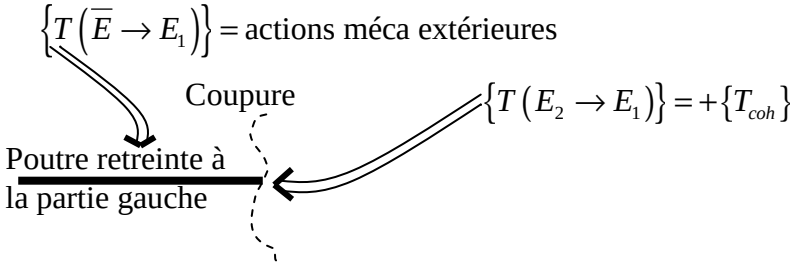
- Les efforts de E2 sur E1 sont intérieurs à la poutre, on les appelle **efforts de cohésion**
- **Le torseur de cohésion est le torseur des actions mécaniques de la partie droite sur la partie gauche TOUJOURS réduit au barycentre G de la section droite où est effectuée la coupure**

Le torseur des actions mécaniques intérieures qu'exercent la partie gauche sur la partie droite est donc par conséquence l'opposé du torseur de cohésion. Ainsi pour déterminer ce torseur de cohésion, on effectue des coupures fictives et on écrit



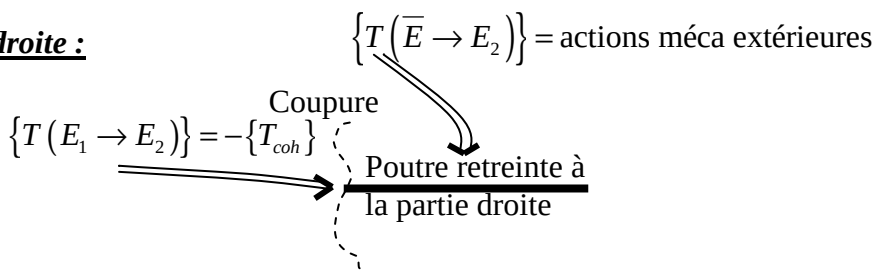
En conservant la partie gauche :

On peut en écrire l'équilibre en remplaçant la partie coupée (ici la droite) par le torseur de cohésion



Ainsi : ${}_G\left\{T\left(\overline{E}\to E_1\right)\right\}+\left\{T_{\text{cohésion}}\right\}={}_G\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$ soit $\boxed{\left\{T_{\text{cohésion}}\right\}=-{}_G\left\{T\left(\overline{E}\to E_1\right)\right\}}$

En conservant la partie droite :



Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

On peut en écrire l'équilibre en remplaçant la partie coupée (ici la droite) par le torseur de cohésion

Ainsi : $\left\{T\left(\overline{E}\to E_2\right)\right\}_G-\left\{T_{\text{cohésion}}\right\}=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_G$ soit $\boxed{\left\{T_{\text{cohésion}}\right\}=\left\{T\left(\overline{E}\to E_2\right)\right\}_G}$

Remarque :

On peut ainsi choisir à souhait de couper à droite (garder la partie droite) ou couper à gauche (garder la partie gauche) suivant la difficulté des calculs, c'est-à-dire le nombre d'actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur la partie droite ou gauche. Les calculs donneront le même torseur de cohésion puisque :

La poutre étant en équilibre :

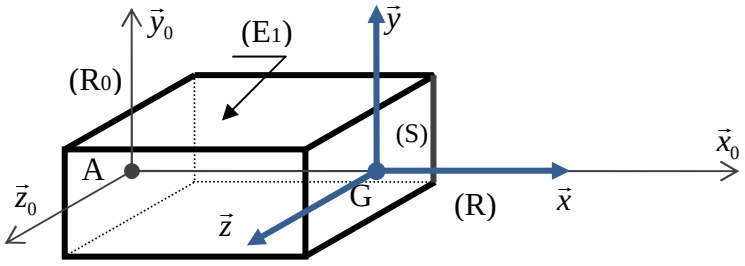
$$\left\{T\left(\overline{E}\to E=\left(E_1\cup E_2\right)\right)\right\}_G=\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_G=\left\{T\left(\overline{E}\to E_1\right)\right\}_G+\left\{T\left(\overline{E}\to E_2\right)\right\}_G \text{ soit :}$$

$\left\{T\left(\overline{E}\to E_1\right)\right\}_G=-\left\{T\left(\overline{E}\to E_2\right)\right\}_G$ ce qui est bien cohérent avec les deux expressions du torseur de cohésion démontrées ci-dessus en coupant à droite ou à gauche !!!

5.2 Composante du torseur de cohésion

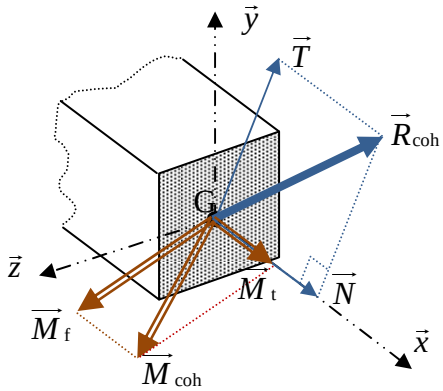
Normale extérieure à la section droite signifie perpendiculaire en G à (S) vers l'extérieure de la matière

Chaque fois que cela est possible (poutre droite), on choisira, pour simplifier les calculs, (R) parallèle à (R_0).



Définitions :

- $R\left(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z}\right)$ lié à la section droite est appelé repère des sollicitations.
- Effort normal $\overrightarrow{N}$: projection de la résultante $\overrightarrow{R}_{\text{coh}}$ du torseur de cohésion suivant la normale extérieure à la section droite $\vec{x}$
- Effort tangentiel $\overrightarrow{T}$: projection de la résultante $\overrightarrow{R}_{\text{coh}}$ du torseur de cohésion dans le plan de la section droite $\left(G,\vec{x},\vec{y}\right)$
- Moment de Torsion $\overrightarrow{M}_t$: projection du moment $\overrightarrow{M}_{\text{coh}}$ du torseur de cohésion suivant la normale extérieure à la section droite $\vec{x}$
- Moment de Flexion $\overrightarrow{M}_f$: projection du moment $\overrightarrow{M}_{\text{coh}}$ du torseur de cohésion dans le plan de la section droite $\left(G,\vec{x},\vec{y}\right)$

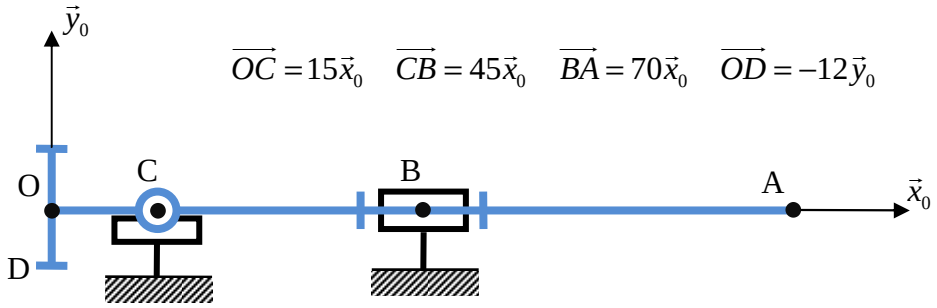


 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.

5.3 Application – Diagramme des sollicitations - Tronçon

On s'intéresse au guidage de l'arbre d'un porte mandrin entrainé en rotation par un pignon

Le modèle mécanique est représenté ci-dessous :



- L'arbre reçoit la puissance par l'intermédiaire du pignon visible à gauche de l'image.

  Action mécanique modélisée par le torseur : $\{T_{\text{pignon}\to\text{arbre}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 65 & 0 \\ -200 & 0 \end{Bmatrix}_{D\,(\vec{x}_0;\vec{y}_0;\vec{z}_0)}$

- Le mandrin exerce sur l'arbre une force résistante modélisée par le torseur :

  $\{T_{\text{mandrin}\to\text{arbre}}\} = \begin{Bmatrix} -625 & -2400 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{A\,(\vec{x}_0;\vec{y}_0;\vec{z}_0)}$

L'équilibre de l'arbre a permis de déterminer les actions mécaniques dans les liaisons :

- Sphére-cylindre en C : $\{T_{\text{batiC}\to\text{arbre}}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -85 & 0 \\ 240 & 0 \end{Bmatrix}_{C\,(\vec{x}_0;\vec{y}_0;\vec{z}_0)}$
- Pivot en B: $\{T_{\text{batiB}\to\text{arbre}}\} = \begin{Bmatrix} 625 & 0 \\ 20 & 1200 \\ -40 & 75 \end{Bmatrix}_{B\,(\vec{x}_0;\vec{y}_0;\vec{z}_0)}$

Déterminons le torseur de cohésion dans les sections droites entre O et A :

Il faut procéder par étapes, c'est à dire le déterminer en tout point de la ligne moyenne de chaque **tronçon**.
Un **tronçon** est défini comme une partie de poutre comprise entre deux charges concentrées (provenant soit de charges extérieures, soit d'actions mécaniques de liaison). En effet ces charges provoquent des discontinuités dans les composantes du torseur de cohésion.

On a donc ici 3 tronçons : OC puis CB et enfin BA. Il faut donc déterminer le torseur de cohésion en tout point G de la ligne moyenne. On paramètre G par $\overrightarrow{OG} = x\,\vec{x}_0$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 22 pages.