ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2002 FILIÈRE **PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Mesure de distances et de vitesses à l'aide d'une diode laser

De nombreuses situations expérimentales, en particulier en robotique, requièrent une mesure de distances et de vitesses d'une manière relativement simple et aussi peu coûteuse que possible. Le but de ce problème est de montrer comment cet objectif peut être atteint à l'aide d'une diode laser, source de lumière que l'on supposera monochromatique et dont la fréquence peut être légèrement modifiée par un courant de commande.

I - Diode laser

Dans tout le problème, la diode est constituée par un milieu homogène, transparent, d'indice n, limité par des faces planes et parallèles distantes de L ; elle est placée dans le vide (figure 1). Entre ces faces formant cavité, l'onde optique est constituée de deux ondes progressives, supposées planes, se propageant en sens inverse, perpendiculairement aux faces ; la direction commune de propagation sera choisie comme axe Oz. Polarisée linéairement, chaque onde sera représentée par l'amplitude complexe $E(z)$ du champ électrique dont la dépendance temporelle est de la forme $\exp(-i\omega t)$.

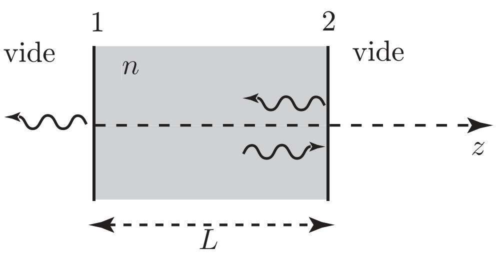

Figure 1

1. En utilisant les relations de continuité du champ électromagnétique, déterminer le coefficient de réflexion r en amplitude sur une face de la cavité (milieu → vide) en fonction de n ainsi que le coefficient de transmission t correspondant.

2. Soit E_0 l'amplitude complexe, au niveau de la face 2 (figure 1), de l'onde qui arrive sur cette face. On désigne par k le module du vecteur d'onde $\vec{k}$ *dans le vide*. Exprimer l'amplitude de l'onde après un aller et retour complet dans la cavité en fonction de E_0, r, k, L et n.

3. En fait, au cours de son trajet dans la cavité, l'onde est amplifiée par le phénomène appelé émission induite. Une manière d'exprimer cette propriété est d'utiliser un indice complexe n_c tel que $n_c = n - ig$ avec $g > 0$.

a) Justifier la forme de cette expression.

b) Trouver la relation qui doit exister entre r, n_c, k et L pour qu'il y ait un régime permanent d'amplitude constante. Cette relation sera dans la suite dénommée « condition laser ».

4. On suppose $g \ll n$, ce qui permet d'utiliser pour r l'expression obtenue en **1**. En régime permanent, la diode laser n'émet que pour des fréquences particulières ν_p situées dans une certaine plage.

a) Déterminer l'écart $\Delta\nu$ entre deux fréquences consécutives possibles ν_p et ν_{p+1} de l'onde.

b) On appelle « coefficient d'amplification » le facteur $\alpha = kg$. Déterminer en fonction de L et r la valeur α_0 que doit avoir α en régime permanent ?

5. *Application numérique.* On donne $n = 3,40$ et $L = 0,5$ mm.

a) Calculer $\Delta\nu$, r et α_0.

b) La longueur d'onde de l'oscillation laser est voisine de 845 nm ; calculer la valeur g_0 de g correspondante ; justifier l'approximation faite sur la valeur de r à la question **4**.

6. L'amplification dans un milieu laser nécessite une « inversion de populations », c'est-à-dire que le niveau supérieur de la transition optique soit plus peuplé que le niveau inférieur. L'émission induite tend à diminuer cette inversion, ce qui entraîne que le coefficient d'amplification α décroît lorsque l'intensité I de l'onde optique croît ; l'intensité I est définie ici comme la puissance de chaque onde progressive à l'intérieur de la cavité. On admettra que la relation entre α et I est de la forme : $\alpha(I) = \dfrac{\alpha_m}{1 + I/I_0}$ où α_m et I_0 sont deux constantes. On donne $\alpha_m = 2 \times 10^3$ m^{-1}, $I_0 = 10$ mW.

Calculer I en régime permanent et la puissance de sortie I_s du faisceau laser par l'une des faces.

II - Principe des mesures de position et de vitesse d'un obstacle

Dans cette partie, on étudie qualitativement l'effet sur le fonctionnement d'une diode laser de l'onde émise puis réfléchie (ou rétrodiffusée) par un obstacle extérieur et revenant dans la cavité, puis le principe de son utilisation aux mesures de position et de vitesse d'un obstacle.

Le dispositif est modélisé selon le schéma de la figure 2 ; soit ρ réel positif le coefficient de réflexion en amplitude sur l'obstacle, qui avec la face 2 forme une cavité de longueur D. On supposera $\rho \ll 1$. On désigne par ν_p la fréquence d'oscillation de la diode laser en l'absence d'obstacle.

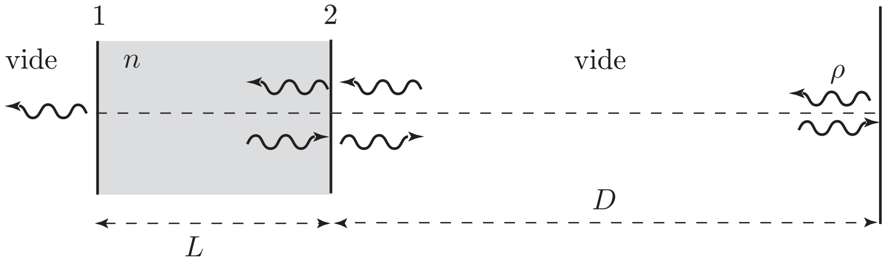

Figure 2

1. Justifier sans calcul que, lorsque l'onde, sortant de la face 2, y revient en phase après un aller et retour, le coefficient d'amplification du milieu est diminué, et que la puissance du faisceau laser est alors maximale. Justifier de même que la puissance du faisceau est minimale si l'onde revient en opposition de phase.

L'indice n du milieu dépend du courant d'alimentation de la diode ; en faisant varier ce courant, on modifie la fréquence de fonctionnement ν_p ; *on supposera dans toute cette partie* **II.** *que cette fréquence est imposée par le contrôle du courant d'alimentation.*

2. Par une rampe de courant, on réalise une croissance monotone de ν_p à $\nu_p + \Delta\nu_p$; l'obstacle est fixe. On observe que la puissance émise passe par une succession de maximums.

a) Quelle est la différence de fréquence $\delta\nu$ entre deux maximums consécutifs ?

b) Déterminer la relation entre le nombre N_D de maximums détectés, $\Delta\nu_p, c$ et la distance D.

c) Pour $\Delta\nu_p = 50$ GHz, exprimer D en fonction de N_D ; quelle incertitude sur la mesure de D a-t-on par ce comptage ?

3. On suppose maintenant la fréquence ν_p fixe et l'obstacle mobile avec la vitesse v telle que $D(t) = D_0 + vt$. Durant l'intervalle de temps Δt, on détecte N_v maximums de puissance laser. En utilisant les résultats précédents (**2.a)**), déterminer la relation entre $v, \Delta t, \nu_p, c$ et N_v en supposant la vitesse constante durant Δt. Pour $\Delta t = 20$ ms, quelle est la résolution de la détermination de la vitesse à partir de N_v ?

4. L'obstacle étant animé de la vitesse v, on impose au courant de commande de la diode une loi de variation « triangulaire » de durée totale T ; la variation de la fréquence laser suit la même loi : croissance de $\Delta\nu_p$ durant $T/2$, puis décroissance jusqu'à la valeur de départ ν_p durant $T/2$. On observe N_1 maximums durant la première phase et N_2 durant la seconde. *Dans cette question*, on suppose la vitesse v suffisamment grande et positive ; d'autre part, pour simplifier, on traitera N_1 et N_2 comme des variables continues.

Déduire la distance et la vitesse de l'obstacle en fonction de $\Delta\nu_p, T, N_1, N_2$ et la longueur d'onde λ_p du rayonnement.

III - Diode laser avec cavité extérieure

Dans cette partie, on analyse *quantitativement* l'effet de l'onde réfléchie par l'obstacle (cf. **partie II**) sur l'intensité émise par la diode.

1. Soient r' et t' les coefficients de réflexion et de transmission pour les amplitudes dans le sens vide $\rightarrow$ milieu ; calculer r' et t' en fonction de n ; montrer que $r + r' = 0$ et que $r^2 + t\,t' = 1$.

2.a) En appliquant les relations de continuité aux ondes arrivant sur la face 2 ou en repartant (cf. figure 2), montrer que l'on peut assimiler l'ensemble à une cavité laser, de longueur L identique à l'initiale, mais avec un coefficient de réflexion Z sur la face 2 donné, avec $\theta = 2kD$, par :

$$Z = \frac{r + \rho \exp(i\theta)}{1 + r\rho \exp(i\theta)} \; .$$

b) Simplifier l'expression de Z en ne gardant que les termes du premier ordre en ρ.

Dans la suite, on posera $a = \rho\left(\frac{1}{r} - r\right)$ avec $a \ll 1$.

3.a) Donner dans cette situation la nouvelle expression de la « condition laser ».

b) En déduire le coefficient d'amplification α qui maintient l'oscillation en fonction de r, L, a et θ.

c) Soit $\delta\alpha$ l'excursion maximale de α lorsque le déphasage de l'onde retour varie ; exprimer $\delta\alpha/\alpha_0$ en fonction de a et r, α_0 étant la valeur de α pour $\rho = 0$ (cf. **I.4.b)**). En donner la valeur numérique pour $\rho = 1 \times 10^{-3}$.

4.a) Montrer que l'intensité du faisceau laser émis varie en fonction du déphasage de l'onde à son retour. Pour quelles valeurs de θ est-elle maximale ? Quelle est alors la fréquence d'émission ?

b) Calculer, avec les données numériques précédentes, la variation relative de l'intensité du faisceau laser $(I_{\max} - I_{\min})/I$, I étant l'intensité moyenne.

IV - Analyse de la forme du signal

L'expérience montre que, lors du déplacement de l'obstacle ou lors d'un balayage de fréquence par modification du courant de commande (cf. **partie II**), on observe bien des variations presque périodiques de la puissance émise mais souvent avec des discontinuités associées à des sauts de fréquence. C'est cet effet qui est analysé dans cette dernière partie.

1. À partir de la « condition laser » obtenue en **III.3.a)**, montrer, pour $a \ll 1$, que la fréquence d'oscillation est déterminée par la relation approchée :

$$n\frac{L}{D}\theta + a\sin\theta = p\,2\pi \quad \text{avec} \quad p \text{ entier}.$$

2. Pour un courant de commande fixé et en l'absence d'obstacle ($a = 0$), on note n_0 et g_0 les valeurs de l'indice n et du coefficient g du milieu, et k_0 le module du vecteur d'onde.

En présence de l'obstacle, à la modification $\delta g = g - g_0$ est associée en fait une modification $\delta n = n - n_0$ de l'indice, avec $\delta n = \beta\,\delta g$, où β est un coefficient positif de l'ordre de quelques unités ; cela entraîne une modification de k : $\delta k = k - k_0$.

a) En linéarisant le résultat obtenu en **III.3.**, montrer que : $g_0\,\delta k + k_0\,\delta g = -\dfrac{a}{2L}\cos\theta$.

b) Montrer de même que la « condition laser » s'écrit : $n_0\,\delta k + k_0\,\delta n = -\dfrac{a}{2L}\sin\theta$.

c) Justifier l'hypothèse $\beta\,g_0 \ll n_0$, et exprimer $n_0\,\delta k$ en fonction de a, L, β et θ.

3. Montrer que la relation déterminant k se met sous la forme :

$$A - B\theta = \sin(\theta - \varphi)$$

avec $\beta = \tan\varphi$, et donner les expressions de A et B en fonction de p, a, n_0, L, D et β. Calculer φ avec $\beta = 6$. Évaluer A et B pour $\rho = 1 \times 10^{-3}$ et $D = 0,5$ m.

4. En vue d'effectuer une analyse graphique de cette équation, préciser la valeur θ_0 de θ qui annule $A - B\theta$ et tracer le graphe de $\sin(\theta - \varphi)$ au voisinage de θ_0. Porter sur ce graphe les points M correspondant aux maximums d'intensité du laser et les points m correspondant aux minimums.

5.a) À courant de commande fixé, donc n_0 fixé, on augmente D. En traçant localement le graphe de $A - B\theta$ au voisinage de θ_0 et en suivant son déplacement (on notera que $A \gg 1$), montrer graphiquement que, pour $B > 1$, θ augmente de façon continue mais irrégulière, et, pour $B < 1$, par parties continues séparées par des sauts.

b) Lorsqu'ils existent, ces sauts de θ sont accompagnés de sauts d'amplitude du faisceau laser ; quel est le sens de cette variation ?

c) Dans les mêmes conditions, on diminue D ; quel est alors le sens de variation des sauts d'intensité ?

6. À D fixé, on augmente de façon régulière le courant de commande de la diode, ce qui augmente de même n_0 ; quel est le sens de variation de θ ? Quel est celui des discontinuités d'intensité dans les conditions où elles apparaissent ?

7. Quel est l'intérêt de ces sauts d'intensité pour la détection ?

* *
*

Rapport de Mme Nathalie PALANQUE-DELABROUILLE et M. Laurent SCHOEFFEL, correcteurs.

Le problème propose une mesure simple de distances et de vitesses à l'aide d'une diode laser. La première partie de l'épreuve traite d'une modélisation de cette diode laser, cavité d'indice n dans laquelle l'onde est amplifiée par l'émission induite. La deuxième partie introduit l'obstacle extérieur qui réfléchit partiellement l'onde venant de la diode laser vers cette même cavité. Cette partie propose alors une première étude qualitative de l'intensité de sortie du faisceau laser afin de mesurer la distance et la vitesse de l'obstacle ainsi que la précision obtenue avec ce type de mesure. L'analyse est reprise quantitativement lors de la troisième partie. Finalement, la quatrième partie concerne l'étude de la forme du signal de sortie. En particulier, cette partie aborde le problème de la détection des sauts de l'intensité de sortie qui permettent par exemple de déterminer le sens du déplacement de l'obstacle.

La plupart des candidats ont traité l'épreuve de manière linéaire, comme il est naturel pour cet énoncé. En particulier, la résolution de la partie III nécessite une bonne compréhension des éléments abordés lors de la partie I. La première partie et le début de la seconde ont ainsi été bien résolus, la fin de la deuxième partie et la troisième se sont avérées très sélectives. La dernière partie, relativement peu abordée, a permis d'identifier les meilleures copies : 5% des candidats seulement ont fait plus de la moitié de la partie IV.

La répartition des notes des 1327 candidats français est la suivante :

$0 \leq \text{N} < 4$	13%
$4 \leq \text{N} < 8$	32%
$8 \leq \text{N} < 12$	35%
$12 \leq \text{N} < 16$	16%
$16 \leq \text{N} < 20$	4%

La moyenne s'établit à 8,5 et l'écart type à 3,9. Parmi ces candidats, 53 ont obtenu une note potentiellement éliminatoire (note ≤ 2) et 3 une note égale à 20/20.

De manière générale pour cette épreuve, la résolution des différentes questions ne requiert pas de calculs complexes mais nécessite une bonne connaissance des éléments de base du cours ainsi qu'une bonne capacité d'analyse. D'ailleurs, bien comprises, la majorité des questions de ce problème peuvent être résolues en quelques lignes. Le sens physique est en effet essentiel pour une bonne approche de ce problème, les applications numériques étant importantes : elles permettent également de guider le candidat. Le sens critique par rapport à un résultat aberrant permet souvent de remonter le fil du raisonnement et d'identifier son erreur. Pour les candidats de la filière PC, cette qualité est importante. Nous recommandons en particulier de s'interroger systématiquement sur l'homogénéité des formules proposées et sur les ordres de grandeur obtenus.

De plus, comme souligné dans les rapports des années précédentes, l'expression du raisonnement, avec clarté, précision et concision, est aussi importante que le résultat brut, fusse-t-il juste. La notation de chaque question y accorde donc une part importante. En ce qui concerne les applications numériques, une partie des points est attribuée même en cas de valeur inexacte si le détail de la copie permet de localiser l'origine de l'erreur. Nous accordons également une place dans la notation pour les unités.

Nous revenons dans la suite en détail sur les différentes questions de l'épreuve, en illustrant les remarques précédentes.

Partie I

Cette partie propose une étude de la cavité laser en modélisant le phénomène d'émission induite par un indice (effectif) complexe, la partie imaginaire négative représentant l'amplification. Elle se limite pour l'essentiel à des résultats présentés en cours. Les candidats ont obtenu en moyenne 63% des points pour cette partie.

1. L'établissement des coefficients de réflexion et transmission en amplitude milieu/vide est une question de cours et n'a pratiquement jamais posé de difficulté. Quelques candidats ont tout de même omis de poser les éléments de base du raisonnement (relations de continuité du champ EM à l'interface) et ont simplement écrit le résultat : ce n'est pas suffisant. Cependant, il n'est pas nécessaire non plus de rappeler le cours sur plusieurs pages.

2) La plupart des candidats ont proposé une bonne réponse pour l'amplitude complexe de l'onde après un aller-retour dans la cavité.

3.a) Question simple très bien traitée. Rappelons cependant que l'approche vectorielle n'impose pas de distinguer les deux sens de déplacement de l'onde.

3.b) La dérivation de la relation de régime permanent dans la diode ou condition laser ne présente pas de difficulté : elle découle du résultat de la question **2)** et de la lecture de l'énoncé (régime permanent d'amplitude constante). Le raisonnement est en général correct mais nous déplorons que beaucoup de candidats aient pris brutalement la racine carrée de l'expression complexe obtenue, ce qui peut avoir une incidence sur la suite de l'épreuve (en général d'un facteur 2).

4.a) La phase de la condition laser du **3.b)** donne le résultat. Cependant, de nombreuses copies présentent le résultat à un facteur 2 près ! C'est dommage car même sans établir la condition laser, trouver les fréquences de résonance d'une cavité de longueur L et d'indice n est une question de cours. Rappelons qu'un traitement en notation complexe facilite la résolution de ce type de question.

4.b) La grande majorité des candidats a correctement pris le module de la condition laser, cette question a donc été bien résolue.

5.a) et (**5.b)** Ces premières applications numériques ont posé des difficultés, la plupart liées aux erreurs des questions précédentes. Nous rappelons qu'une partie des points peut être attribuée si la copie permet de localiser l'erreur.

6) La première partie de la question qui consiste à calculer l'intensité dans la diode en régime permanent a été correctement traitée. Pour exprimer la puissance de sortie, il convient de calculer le coefficient de transmission en intensité, lequel multiplié par l'intensité de l'onde dans la diode donne l'intensité de sortie. Peu de candidats ont correctement déduit le résultat à partir de l'expression du vecteur de Poynting.

Partie II

Cette partie propose une première approche qualitative pour les mesures de position et de vitesse d'un obstacle extérieur à la cavité laser. Elle fait appel à un bon sens physique. Les candidats ont obtenu en moyenne 40% des points pour cette partie.

1) Cette question qualitative est révélatrice de la bonne compréhension du dispositif proposé. Nous avons obtenu de nombreuses bonnes réponses mais certaines copies n'ont répondu qu'à la moitié de la question. D'autres encore se sont contentés de paraphraser l'énoncé sans rien démontrer.

2.a) Il s'agit de trouver les fréquences de résonance d'une cavité de longueur D. Ce raisonnement, en tout point similaire à celui de la question **I.4.a)** a conduit souvent aux mêmes imprécisions. Notons que certains candidats sont parvenus à résoudre correctement cette question (à partir de résultats du cours) bien qu'ayant échoué sur la question **I.4.a)**.

2.b) Le nombre de maxima observé lors d'un balayage en fréquence se calcule aisément avec le résultat précédent : question sans difficulté.

2.c) L'incertitude sur D se déduit immédiatement de la partie entière de la relation issue de la question **2.b)**. L'application numérique est ici importante car elle permet au candidat d'exprimer son sens critique. Des incertitudes de l'ordre du mètre ou plus auraient dû alerter leurs auteurs. Notons également que l'énoncé demande de trouver l'incertitude (absolue) sur la mesure de D et non l'erreur relative que les données du problème ne permettent pas de calculer numériquement.

3) La fréquence de fonctionnement de la diode est fixée et l'obstacle se déplace à vitesse constante pendant un intervalle de temps Δt. L'expression demandée dans l'énoncé pour le nombre de maxima détectés s'établit de manière analogue à celui de la question **2.a)**. Toutefois, beaucoup de candidats ne sont pas parvenus à établir une réponse correcte. Le cheminement de la réflexion, quand il était correct, a été bien récompensé, même en l'absence de solution finale satisfaisante. Il s'agit ainsi de la première question sélective du problème. Nous rappelons à certains candidats que la vitesse de propagation d'une onde EM dans le vide est toujours égale à c, même après une réflexion sur un obstacle en mouvement ! Concernant l'application numérique, peu de candidats se sont souvenus que la longueur d'onde de la diode est donnée dans la partie I et ils ont utilisé la valeur donnée pour Δv_p.