



*Les calculatrices sont autorisées.*

\*\*\*\*

*N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.  
Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

\*\*\*\*

*Le sujet comporte 6 pages.*

**Notations :**

On note :

- $\mathbb{N}$  : l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{R}$  : l'ensemble des nombres réels,
- $\mathbb{C}$  : l'ensemble des nombres complexes.

Pour  $z$  appartenant à  $\mathbb{C}$ , on note  $|z|$  son module.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note :

- $n!$  la factorielle de  $n$  avec la convention  $0! = 1$ ,
- $\llbracket 0, n \rrbracket$  l'ensemble des entiers naturels  $k$  vérifiant  $0 \leq k \leq n$ ,
- $\binom{n}{k}$  le nombre de parties ayant  $k$  éléments d'un ensemble de  $n$  éléments,  
pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

On rappelle :

- la valeur de  $\binom{n}{k}$  :  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

• la formule du binôme : si  $z_1$  et  $z_2$  sont des nombres complexes et  $n$  un entier naturel,

alors : 
$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}.$$

Enfin si  $n$  est un entier naturel non nul on note  $\sigma_n$  la somme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

et on pose  $\sigma_0 = 0$ .

### Objectifs :

Dans les parties I et II on étudie un procédé de sommation, la partie III est consacrée à l'étude de diverses fonctions et en particulier une fonction  $\varphi$  à laquelle on applique ledit procédé de sommation.

## Étude d'un procédé de sommation

Dans les parties I et II les notations utilisées sont les suivantes :

Toute application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{C}$  étant une suite complexe, si  $a$  est une telle suite, on utilise la notation usuelle  $a(n) = a_n$ .

À toute suite complexe  $a$ , on associe la suite  $a^*$  définie par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$ .

L'objet des parties I et II est de comparer les propriétés de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  aux propriétés de la série

$$\sum_{n \geq 0} a_n.$$

## PARTIE I

### Deux exemples

#### I.1/ Cas d'une suite constante.

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  ; on suppose que la suite  $a$  est définie par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \alpha$ .

I.1.1/Expliciter  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

I.1.2/Expliciter  $a_n^*$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

I.1.3/La série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  ( resp.  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  ) est-elle convergente ?

#### I.2/ Cas d'une suite géométrique.

Soit  $z \in \mathbb{C}$  ; on suppose que la suite  $a$  est définie par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = z^n$ .

I.2.1/Exprimer  $a_n^*$  en fonction de  $z$  et  $n$ .

I.2.2/On suppose que  $|z| < 1$ .

I.2.2.1/ Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et expliciter sa somme  $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ .

I.2.2.2/ Justifier la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  et expliciter sa somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$  en fonction de  $A(z)$ .

I.2.3/On suppose que  $|z| \geq 1$ .

I.2.3.1/ Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  ?

I.2.3.2/ Quelle est la nature de  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  si  $z = -2$  ?

I.2.3.3/ On suppose que  $z = e^{i\theta}$ , avec  $\theta$  réel tel que  $0 < |\theta| < \pi$   
Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ .

## PARTIE II

### Étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que la suite  $a$  est à valeurs réelles, la suite  $a^*$  étant toujours définie par : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k$ .

#### II.1/ Comparaison des convergences des deux suites.

II.1.1/ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère un entier  $k$  fixé,  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

II.1.1.1/ Préciser un équivalent de  $\binom{n}{k}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

II.1.1.2/ En déduire la limite de  $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

II.1.2/ Soient  $a$  une suite réelle et  $q$  un entier naturel fixé.

On considère pour  $n > q$  la somme  $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^q \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}$ .

Quelle est la limite de  $S_q(n, a)$  lorsque l'entier  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

**II.1.3/** On suppose que  $a_n$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ;  
 Montrer que  $a_n^*$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  .

**II.1.4/** On suppose que  $a_n$  tend vers  $l$  (limite finie) lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  . Quelle est la limite de  $a_n^*$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  ?

**II.1.5/** La convergence de la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle équivalente à la convergence de la suite  $(a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

**II.2/ Comparaison des convergences des séries  $\sum_{n \geq 0} a_n$  et  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  .**

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ ,  $T_n = \sum_{k=0}^n a_k^*$ ,  $U_n = 2^n T_n$  .

**II.2.1/** Pour  $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ , exprimer  $U_n$  comme combinaison linéaire des sommes  $S_k$ ,  
 c'est à dire sous la forme  $U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k$  .

**II.2.2/** On se propose de déterminer l'expression explicite de  $U_n$  comme combinaison linéaire des sommes  $S_k$  pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k \text{ pour } n \in \mathbb{N} .$$

**II.2.2.1/** A quelle expression des coefficients  $\lambda_{n,k}$  (en fonction de  $n$  et  $k$ ) peut-on s'attendre compte tenu des résultats obtenus à la question **II.2.1** ?

**II.2.2.2/** Etablir la formule  $(\mathcal{E})$  par récurrence sur l'entier  $n$  (on pourra remarquer que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :  $a_k = S_k - S_{k-1}$  avec la convention  $S_{-1} = 0$ ) .

**II.2.3/** On suppose que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  est convergente.

Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  est convergente et exprimer la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$  en fonction de la somme  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  .

**II.2.4/** La convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n$  est-elle équivalente à la convergence de la série  $\sum_{n \geq 0} a_n^*$  ?