

2 Systèmes d'équations linéaires

* Soient i et j deux numéros de lignes **distincts** ; soit d'autre part λ et μ deux scalaires ($\lambda \neq 0$) : l'opération " remplacer la $i^{\text{ème}}$ ligne L_i par $\lambda L_i + \mu L_j$ " se codera $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$.

Z \rightarrow : Si $\mu = 0$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$. Mais si $\lambda = 0$, alors on a remplacé la ligne L_i par la ligne μL_j , autrement dit la ligne L_i a disparu : le système n'a aucune raison en général d'avoir le même ensemble de solutions que le système initial qui contenait la ligne L_i .

METHODE DU PIVOT DE GAUSS

SYSTEMES REDUITS

La méthode du pivot de Gauss consiste à remplacer un système linéaire de n équations à p inconnues à coefficients non tous nuls (sinon la résolution est immédiate) par un système équivalent, triangulaire, c'est-à-dire de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{r,r}x_r & \cdots & + & a_{r,p}x_p & = & b_r \\ & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\ & & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & 0 & = & b_n \end{array} \right.$$

Les $n - r$ dernières équations apparaissent si $r < n$
(Un tel système sera dit système réduit).

Les équations à coefficients non tous nuls précèdent les autres. Désignons par r le nombre de ces équations ; les inconnues sont ordonnées de telle sorte que pour tout indice $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la $i^{\text{ème}}$ inconnue figure effectivement dans la ligne numéro i : ainsi x_1 figure bien dans la première ligne L_1 , x_2 figure bien dans la deuxième ligne L_2 , etc..., x_r figure bien dans la ligne L_r , ce qui veut dire que : $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, etc... $a_{r,r}$ **ne sont pas nuls**.

DEFINITION : Les nombres réels $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{r,r}$, sont appelés *pivots* .

Nous envisagerons les trois cas suivants : $n = p$; $n < p$ et $n > p$