RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES

SYSTEMES D'EQUATIONS

DEFINITION : *Un système de n équations linéaires à p inconnues $x_1, \cdots, x_p$ est un système du type suivant :*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p,}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

Où les $a_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{R}$. Les éléments de $\mathbb{R}$ seront parfois appelés les scalaires.

DEFINITION : *Une solution du système est un p-uplet de $\mathbb{R}^p$, que nous noterons $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ qui est solution de toutes les équations du système.*

Un système est dit homogène si $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.

On peut donc remarquer qu'un système linéaire est homogène si et seulement s'il admet le p-uplet $(0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^p$ comme solution.

RESOLUTION

On remplace un système par un système équivalent (c'est-à-dire un système ayant le même ensemble de solutions) en appliquant les règles suivantes :

$*$ On peut changer l'ordre des équations : on codera $L_i \longleftrightarrow L_j$, l'opération " échanger les lignes L_i et L_j ".

$*$ On peut changer l'ordre des inconnues (mais en gardant, bien sûr, les coefficients qui les multiplient) : on codera $C_i \longleftrightarrow C_j$, l'opération " échanger les colonnes C_i et C_j ".

$*$ On peut multiplier les deux membres d'une équation par un même scalaire **non nul** λ. L'opération " remplacer la i$^{\text{ème}}$ ligne, notée L_i, du système par λL_i ", se codera $L_i \longleftarrow \lambda L_i$.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

$*$ Soient i et j deux numéros de lignes **distincts** ; soit d'autre part λ et μ deux scalaires ($\underline{\lambda \neq 0}$) : l'opération " remplacer la i$^{\text{ème}}$ ligne L_i par $\lambda L_i + \mu L_j$ " se codera $L_i \longleftarrow \lambda L_i + \mu L_j$.

> $\mathbb{Z} \rightarrow$: Si $\mu = 0$, $L_i \longleftarrow \lambda L_i$. Mais si $\underline{\lambda = 0}$, alors on a remplacé la ligne L_i par la ligne μL_j , autrement dit la ligne L_i a disparu : le système n'a aucune raison en général d'avoir le même ensemble de solutions que le système initial qui contenait la ligne L_i.

METHODE DU PIVOT DE GAUSS

SYSTEMES REDUITS

La méthode du pivot de Gauss consiste à remplacer un système linéaire de n équations à p inconnues à coefficients non tous nuls (sinon la résolution est immédiate) par un système équivalent, triangulaire, c'est-à-dire de la forme suivante :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ & & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & \ddots & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{r,r}x_r & \cdots & + & a_{r,p}x_p & = & b_r \\ & & & & & & & 0 & = & b_{r+1} \\ & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & 0 & = & b_n \end{cases}$$

Les $n - r$ dernières équations apparaissent si $r < n$

(Un tel système sera dit système réduit).

Les équations à coefficients non tous nuls précèdent les autres. Désignons par r le nombre de ces équations ; les inconnues sont ordonnées de telle sorte que pour tout indice $i \in [\![1, r]\!]$, la i$^{\text{ème}}$ inconnue figure effectivement dans la ligne numéro i : ainsi x_1 figure bien dans la première ligne L_1, x_2 figure bien dans la deuxième ligne L_2 , etc..., x_r figure bien dans la ligne l_r , ce qui veut dire que : $a_{1,1}$ **,** $a_{2,2}$ **, etc...** $a_{r,r}$ **ne sont pas nuls.**

DEFINITION : *Les nombres réels* $a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots a_{r,r}$*, sont appelés pivots.*

Nous envisagerons les trois cas suivants : $n = p$; $n < p$ et $n > p$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.