RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

CONVERGENCES DES VARIABLES ALEATOIRES

CONVERGENCE EN LOI

DEFINITION : *Soit (X_n) une suite de VARD de Ω dans $\mathbb{R}$ et X une VAR de Ω dans $\mathbb{R}$. Notons F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X. On dit que $(X_n)_{n\in N^*}$ converge en loi vers X si :*

en tout point $x \in \mathbb{R}$ où F est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$.

Cas où X est une variable discrète :

Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) \subset X(\Omega)$, alors (X_n) converge en loi vers X si et seulement si

$\forall x \in X(\Omega)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$.

Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VARD de Ω dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = p \in]0, 1[$.

Alors (X_n) converge en loi vers une VARD X de Ω dans $\mathbb{N}$ telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(p)$.

Convergence de la loi l'hypergéométrique vers la loi binomiale

Soit X_N une suite de VARD qui suivent la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ et

$S = \{N \in \mathbb{N} \ / \ Np \in \mathbb{N}^*\}$.

$(X_N)_{N\in S}$ converge en loi vers une variable X qui suit la binomiale $B(n, p)$.

INEGALITE DE BIENAYME-TCHEBICHEFF

Soit X une variable à densité possédant une espérance m et une variance $\sigma^2 > 0$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.

Quelques remarques

a) Cette inégalité est valable pour toute variable (à densité ou non) pourvu que celle-ci possède une espérance et une variance.

b) Si la variance est nulle, alors la probabilité que $|X-m| \geq \varepsilon$ est nulle, ce qui veut dire que X est presque sûrement égale à m.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VARD de Ω dans $\mathbb{R}$, indépendantes 2 à 2, de même loi, ayant une espérance notée m et une variance strictement positive notée σ^2. Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $Z_n = \dfrac{S_n}{n}$.

Alors $\forall \varepsilon > 0\ ,\ P(|Z_n - m| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$

Remarque : On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Z_n - m| \geq \varepsilon) = 0$, ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Z_n - m| < \varepsilon) = 1$ (en prenant l'événement contraire).

Cas de variables de Bernoulli : Soit (X_n) une suite de variables de Bernoulli, indépendantes 2 à 2, telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Avec les mêmes notations que précédemment, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|Z_n - p| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Ce théorème s'appelle aussi le théorème d'or de Bernoulli.

CONVERGENCE EN PROBABILITE

DEFINITION : *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires et X des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. On dit que la suite (X_n) converge en probabilité vers X si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to+\infty} p(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

LA LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes, de même loi et ayant une espérance m et une variance σ^2.
On pose $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et Z la variable certaine égale à m.
Alors la suite (Z_n) converge en probabilité vers Z.

Une condition suffisante de convergence en probabilité :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes, de même loi et ayant une espérance m et une variance. Alors

$\left(\lim\limits_{+\infty} E(X_n - X) = 0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{+\infty} V(X_n - X) = 0\right) \Longrightarrow \left(X_n \text{ converge en probabilité vers } X\right)$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 5 pages.