RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

CONVERGENCES DES VARIABLES ALEATOIRES

CONVERGENCE EN LOI

DEFINITION : *Soit (X_n) une suite de VARD de Ω dans $\mathbb{R}$ et X une VAR de Ω dans $\mathbb{R}$. Notons F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X. On dit que $(X_n)_{n\in N^*}$ converge en loi vers X si :*

en tout point $x \in \mathbb{R}$ où F est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n(x) = F(x)$.

Cas où X est une variable discrète :

Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) \subset X(\Omega)$, alors (X_n) converge en loi vers X si et seulement si

$\forall x \in X(\Omega)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$.

Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VARD de Ω dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = p \in]0, 1[$.

Alors (X_n) converge en loi vers une VARD X de Ω dans $\mathbb{N}$ telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(p)$.

Convergence de la loi l'hypergéométrique vers la loi binomiale

Soit X_N une suite de VARD qui suivent la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ et

$S = \{N \in \mathbb{N} \ / \ Np \in \mathbb{N}^*\}$.

$(X_N)_{N\in S}$ converge en loi vers une variable X qui suit la binomiale $B(n, p)$.

INEGALITE DE BIENAYME-TCHEBICHEFF

Soit X une variable à densité possédant une espérance m et une variance $\sigma^2 > 0$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

Quelques remarques

a) Cette inégalité est valable pour toute variable (à densité ou non) pourvu que celle-ci possède une espérance et une variance.

b) Si la variance est nulle, alors la probabilité que $|X-m| \geq \varepsilon$ est nulle, ce qui veut dire que X est presque sûrement égale à m.

> **Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VARD de Ω dans $\mathbb{R}$, indépendantes 2 à 2, de même loi, ayant une espérance notée m et une variance strictement positive notée σ^2. Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $Z_n = \dfrac{S_n}{n}$.**
>
> **Alors $\forall \varepsilon > 0$, $P(|Z_n - m| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$**

Remarque : On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Z_n - m| \geq \varepsilon) = 0$, ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|Z_n - m| < \varepsilon) = 1$ (en prenant l'événement contraire).

Cas de variables de Bernoulli : Soit (X_n) une suite de variables de Bernoulli, indépendantes 2 à 2, telles que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Avec les mêmes notations que précédemment, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|Z_n - p| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Ce théorème s'appelle aussi le théorème d'or de Bernoulli.

<u>CONVERGENCE EN PROBABILITE</u>

DEFINITION : *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires et X des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, p)$. On dit que la suite (X_n) converge en probabilité vers X si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} p(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

<u>LA LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES</u>

> **Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes, de même loi et ayant une espérance m et une variance σ^2.**
>
> **On pose $Z_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et Z la variable certaine égale à m.**
>
> **Alors la suite (Z_n) converge en probabilité vers Z.**

Une condition suffisante de convergence en probabilité :

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables indépendantes, de même loi et ayant une espérance m et une variance. Alors

$\left(\lim\limits_{+\infty} E(X_n - X) = 0 \text{ et } \lim\limits_{+\infty} V(X_n - X) = 0\right) \Longrightarrow \Big(X_n$ converge en probabilité vers $X\Big)$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE