



RESUME DU COURS DE MATHÉMATIQUES



CONVERGENCES DES

VARIABLES ALÉATOIRES

CONVERGENCE EN LOI

DEFINITION : Soit (X_n) une suite de VARD de Ω dans \mathbb{R} et X une VAR de Ω dans \mathbb{R} . Notons F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X . On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X si :

en tout point $x \in \mathbb{R}$ où F est continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = F(x)$.

Cas où X est une variable discrète :

Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n(\Omega) \subset X(\Omega)$, alors (X_n) converge en loi vers X si et seulement si

$\forall x \in X(\Omega)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$.

Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de VARD de Ω dans \mathbb{N} telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = p \in]0, 1[$.

Alors (X_n) converge en loi vers une VARD X de Ω dans \mathbb{N} telle que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(p)$.

Convergence de la loi l'hypergéométrique vers la loi binomiale

Soit X_N une suite de VARD qui suivent la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$ et $S = \{N \in \mathbb{N} / Np \in \mathbb{N}^*\}$.

$(X_N)_{N \in S}$ converge en loi vers une variable X qui suit la binomiale $B(n, p)$.

INEGALITE DE BIENAYME-TCHEBICHEFF

Soit X une variable à densité possédant une espérance m et une variance $\sigma^2 > 0$. Alors

$$\forall \varepsilon > 0, P(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

2 Convergences

Quelques remarques

a) Cette inégalité est valable pour toute variable (à densité ou non) pourvu que celle-ci possède une espérance et une variance.

b) Si la variance est nulle, alors la probabilité que $|X - m| \geq \varepsilon$ est nulle, ce qui veut dire que X est presque sûrement égale à m .

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de VARD de Ω dans \mathbb{R} , indépendantes 2 à 2, de même loi, ayant une espérance notée m et une variance strictement positive notée σ^2 . Posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $Z_n = \frac{S_n}{n}$.

$$\text{Alors } \forall \varepsilon > 0, P(|Z_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Remarque : On en déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - m| \geq \varepsilon) = 0$, ainsi que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Z_n - m| < \varepsilon) = 1$ (en prenant l'événement contraire).

Cas de variables de Bernoulli : Soit (X_n) une suite de variables de Bernoulli, indépendantes 2 à 2, telles que $X_n \leftrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Avec les mêmes notations que précédemment, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|Z_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

Ce théorème s'appelle aussi le théorème d'or de Bernoulli.

CONVERGENCE EN PROBABILITE

DEFINITION : Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires et X des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, p) . On dit que la suite (X_n) converge en probabilité vers X si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} p(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

LA LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes, de même loi et ayant une espérance m et une variance σ^2 .

On pose $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ et Z la variable certaine égale à m .

Alors la suite (Z_n) converge en probabilité vers Z .

Une condition suffisante de convergence en probabilité :

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables indépendantes, de même loi et ayant une espérance m et une variance. Alors

$\left(\lim_{+\infty} E(X_n - X) = 0 \text{ et } \lim_{+\infty} V(X_n - X) = 0 \right) \implies \left(X_n \text{ converge en probabilité vers } X \right)$