RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

VARIABLES ALEATOIRES

REELLES A DENSITE

VARIABLES A DENSITE

DENSITE

DEFINITION : *On appelle densité toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :*

i) f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,

ii) f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$,

iii) l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

VARIABLES A DENSITE

DEFINITION : *Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons F sa fonction de répartition.*

On dit que X est une variable à densité si et seulement s'il existe une fonction densité f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

THEOREME : Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et f une densité ; il existe une variable aléatoire X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui admet f pour densité.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

CARACTERISATION D'UNE FONCTION DE REPARTITION D'UNE VARIABLE A DENSITE

THEOREME : Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}$. F est la fonction de répartition d'une variable à densité si et seulement si :

(*) $$\begin{cases} F \quad \text{est croissante,} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1, \end{cases}$$

(**) $$\begin{cases} F \quad \text{est continue sur } \mathbb{R}, \\ \text{de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sauf éventuellement en un nombre} \\ \text{fini de points.} \end{cases}$$

Les propriétés (*) sont les propriétés d'une fonction de répartition d'une variable aléatoire quelconque, les propriétés (**) caractérisent une variable à densité.

LIEN ENTRE REPARTITION ET DENSITE

Soit F une fonction vérifiant (*) et (**). Il existe une variable à densité, X, admettant F pour fonction de répartition.

Notons f une densité de X.

En tout point x où F est dérivable, f est donnée par $f(x) = F'(x)$.

Remarque **: s'il existe des points x_0 en lesquels F n'est pas dérivable, on a toute latitude pour y définir f : $f(x_0) \in \mathbb{R}^+$.**

CALCULS DE PROBABILITES

RESULTAT FONDAMENTAL

Soit X une variable à densité. Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ P(X = x) = 0.$

Conséquences

Soit X une variable aléatoire à densité, F sa fonction de répartition et f une densité.

$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a < b$, les quatre événements suivants

$(a < X < b)$, $(a \leq X < b)$, $(a < X \leq b)$ et $(a \leq X \leq b)$ ont la même probabilité.

Cette probabilité commune vaut $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt.$

Une variable à densité admet une infinité de densités. On ne change pas la loi d'une telle variable en modifiant une de ses densités en un nombre fini de points.

LOIS CLASSIQUES

LOI UNIFORME SUR UN INTERVALLE

DEFINITION : *Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

On dit que X suit la loi uniforme sur $[a, b]$ si X admet pour densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a, b] \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b]. \end{cases}$$

Remarque : on aurait pu définir la loi uniforme sur les intervalles $]a; b]$, $]a; b[$, ou $[a; b[$. Il n'y aurait eu aucune différence majeure car, nous l'avons vu, pour une variable à densité il n y a pas de différence entre inégalités larges ou strictes.

Remarque : comme une densité de X est nulle à l'extérieur de $[a, b]$, on dira que $X(\Omega) = [a, b]$.

FONCTION DE REPARTITION

Notons F la fonction de répartition de X.

- $\forall x \le a,\ F(x) = 0,$
- $\forall x \in [a, b],\ F(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$
- $\forall x \ge b,\ F(x) = 1$

LOI EXPONENTIELLE SUR $\mathbb{R}_+$

DEFINITION : *Soit λ un réel* ***strictement*** *positif et X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

On dit que X suit la loi exponentielle de paramètre λ sur $\mathbb{R}_+$ si X admet pour densité f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

Remarque : on aurait pu prendre $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Nous dirons que $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

FONCTION DE REPARTITION

Nous noterons F la fonction de répartition de X.

- Si $x \le 0,\ F(x) = 0.$
- Si $x \ge 0,\ F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

LOI NORMALE DE PARAMETRES $(0,1)$

DEFINITION : *Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X suit la loi normale de paramètres $(0,1)$ - et on écrira $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ - si une densité de X est la fonction φ donnée par :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$$

Remarque : on dit aussi loi normale centrée réduite

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI $\mathcal{N}(0,1)$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt.$$

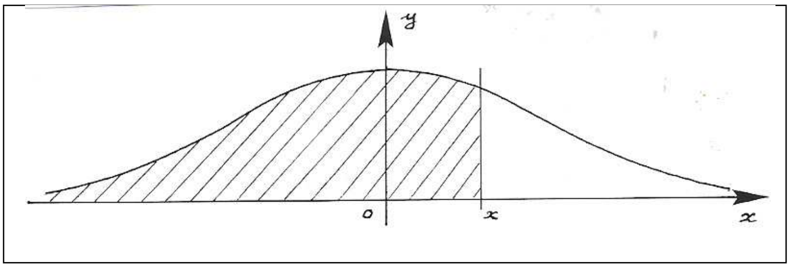
- φ est une fonction paire, donc φ' est impaire et du signe de $-x$.

φ'' s'annule en -1 et 1 et change de signe. φ présente en ces points deux points d'inflexion.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0.$

- Φ est continue dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\Phi' = \varphi > 0$. Φ réalise donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur son image qui est $]0,1[$ (puisque Φ est une fonction de répartition).

D'autre part, comme Φ est positive, $\Phi(x)$ peut s'interpréter comme l'aire de la surface hachurée ci-dessous.



Cette interprétation s'avèrera parfois très utile.

PROPRIETES de Φ

- $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$
- $\forall x \geq 0,\ p(|X| \leq x) = 2\Phi(x) - 1$

$p(|X| \geq x) = 2(1 - \Phi(x))$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE