RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

**VARIABLES ALEATOIRES REELLES DISCRETES**

# VARIABLES ALEATOIRES REELLES DISCRETES

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $X$ une application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

**DEFINITION** : *On dit que $X$ est une variable aléatoire réelle (abrégé VAR ) si pour tout réel $x$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq x\}$ est un événement, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{T}$.*

Il est équivalent de dire : pour tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in I\}$ est un événement.

***Remarque*** : **Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ est une VAR.**

**Notations :** Si $A$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, on notera

$(X \in A) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in A\}$. C'est en fait l'ensemble des antécédents par $X$ des éléments de $A$.

Cas particuliers

$(X = a) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = a\} = (X \in \{a\})$, où $a$ est un réel donné.

$(X \leq a) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq a\} = (X \in ]-\infty, a])$, où $a$ est un réel donné.

$(a \leq X < b) = \{\omega \in \Omega \ / \ a \leq X(\omega) < b\} = (X \in [a, b[)$, où $a$ et $b$ sont des réels donnés.

etc...

$X(\Omega)$ sera, comme pour les applications réelles, l'ensemble des images par $X$ des éléments de $\Omega$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par $X$.

## VARIABLES DISCRETES

**DEFINITION :** *Soit $X$ une VAR de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$. On dit que $X$ est une variable aléatoire réelle discrète (en abrégé VARD ) si l'ensemble $X(\Omega)$ est dénombrable (fini ou non).*


**Jean MALLET et Michel MITERNIQUE**
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

**Notations :** Si $X(\Omega)$ est fini, on écrira $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.
Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, on écrira
$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \ldots\}$ où $x_1 < x_2 < .. < x_n < \ldots$

## LOI DE PROBABILITE D'UNE VARD

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et $X$ une VARD de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

Notons $X(\Omega) = \{x_i \ , \ i \in I\}$ où $I$ désigne l'ensemble des indices ; donc $I$ sera $[\![1, n]\!]$ ou $\mathbb{N}^*$ en général.

**DEFINITION :** *.On appelle loi de probabilité de $X$ la donnée de $\{(x_i, P(X = x_i) \ , i \in I\}$. C'est donc la donnée des couples des valeurs prises par $X$ et des probabilités correspondantes.*

### Propriétés d'une loi de probabilité d'une VARD

- $\forall x_i \in X(\Omega) \ , \ P(X = x_i) \geq 0.$
- $\{(X = x_i) \ , i \in I\}$ est un système complet d'événements. Donc

$$\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

### Caractérisation d'une loi de probabilité d'une VARD

**THEOREME : Soit** $A = \{x_i \ , i \in I\}$ **une partie dénombrable de** $\mathbb{R}$ **et une application** $f : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **telle que** $\sum_{i \in I} f(x_i) = 1$. **Soit** $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ **un espace probabilisé ; il existe une VARD** $X : \Omega \longrightarrow A$ **telle que :** $\forall i \in I, \ f(x_i) = P(X = x_i)$.

## FONCTION DE REPARTITION

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et une VARD $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.
$\forall x \in \mathbb{R} \ , (X \leq x)$ est un événement ; sa probabilité existe donc.

**DEFINITION :** *On appelle fonction de répartition de $X$ l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ F(x) = P(X \leq x)$.*

On remarque que :

$$\boxed{P(X \leq x) = P\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq x\} = \sum_{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x} P(\{\omega\})}$$

## PROPRIETES D' UNE FONCTION DE REPARTITION D' UNE VARD

- $F$ est définie sur $\mathbb{R}$
- $F$ est croissante
- $F$ est en escalier
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

- **Continuité**

Pour $\alpha \notin X(\Omega)$, $F$ est continue en $\alpha$.

Pour $\alpha \in X(\Omega)$, $F$ est continue à droite, discontinue à gauche.

**Caractérisation d'une fonction de répartition**

**Soit $F$ une application de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ possédant les propriétés suivantes :**
**$F$ est croissante au sens large sur $\mathbb{R}$,**

**il existe une suite de réels $(a_i)$ , $i \in I$ (en général $I = [\![1,n]\!]$ ou $\mathbb{N}^*$ ou très rarement $\mathbb{Z}$), croissante strictement, telle que $F$ soit en escalier pour la suite $(a_i)$ , $i \in I$ ($F$ est constante sur $[a_i, a_{i+1}[$,**

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

**Alors $F$ est la fonction de répartition d'une VARD d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.**

- **Détermination de la loi d'une VARD par la fonction de répartition :**

Dans les conditions du théorème précédent, on a :

$X(\Omega) = \{a_i \ , \ i \in I\}$ et $P(X = a_i) = \lim\limits_{x \to a_i^+} F(x) - \lim\limits_{x \to a_i^-} F(x)$.

**FONCTION D' UNE VARD**

Soit $X$ une VARD de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ et $g$ une application définie sur $X(\Omega)$ (au moins), alors $Y = g \circ X$ est une VARD sur $\Omega$, notée $g(X)$.

**SOMME ET PRODUIT DE VARD**

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des VARD de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$ , alors $X_1 + \cdots + X_n$ et $X_1 \times \ldots \times X_n$ sont des VARD de $\Omega$ dans $\mathbb{R}$.

# LOIS DISCRETES CLASSIQUES

On supposera donné l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

## VARIABLE CERTAINE

**DEFINITION :** *$X$ est une variable certaine si l'application $X$ est constante*, donc s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \omega \in \Omega$ , $X(\omega) = a$ ; ce qui veut dire que $X(\Omega) = \{a\}$.

## VARIABLE QUASI-CERTAINE

**DEFINITION :** *$X$ est une variable certaine si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$*

## VARIABLE UNIFORME

**DEFINITION :** *$X$ est une variable uniforme discrète s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :*

*$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et si $\forall k \in [\![1,n]\!]$ , $P(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$.*

**Terminologie :** Si $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$, on dira que $X$ suit la loi uniforme discrète sur $[\![1,n]\!]$ : $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$.


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

## VARIABLE DE BERNOULLI

**DEFINITION :** *$X$ est une variable de Bernoulli si $X(\Omega) = \{0,1\}$ et s'il existe un nombre réel $p \in ]0,1[$ tel que $P(X=1) = p$.*

Alors $P(X=0) = 1-p$, car $(X=1) = \overline{(X=0)}$.

**Terminologie :** On dira souvent que $X$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p$ et on écrira $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$.

**Cas général :** *On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à 2 issues : succès, échec ; la probabilité du succés étant $p \in ]0,1[$.*

## VARIABLE BINOMIALE

**DEFINITION :** *$X$ est une variable binomiale s'il existe un nombre réel $p \in ]0,1[$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :*

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!] \text{ et } \forall k \in [\![0,n]\!] \ , \ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On effectue, de manière indépendante les unes des autres, $n$ épreuves de Bernoulli identiques et on note $X$ la VARD égale au nombre de succès. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

***Remarque*** : des tirages avec remise peuvent être considérés comme la répétition, de manière indépendante, d'une même épreuve de Bernoulli.

## VARIABLE HYPERGEOMETRIQUE

**DEFINITION :** *$X$ est une variable hypergéométrique s'il existe un entier non nul $n$, un entier non nul $N$ , $n \leq N$, un réel $p \in ]0,1[$ tels que :*

$Np \in \mathbb{N}^*, X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$ et

$$\forall k \in X(\Omega) \ , P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On vérifie que $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$ (C'est la formule de Vandermonde).

On note $q = 1-p$, $N_1 = Np$, $N_2 = N(1-p)$ (donc la connaissance de $N_1$ et $N$ détermine celle de $p$). On dira souvent que $X$ suit la loi hypergéométrique de paramètres $N, n, p$ et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$.

$$X(\Omega) = [\mathrm{Max}(0, n-N_2), \mathrm{Min}(n, N_1)]$$

**Cas général :** On a une urne composée de boules indiscernables au toucher, divisée en deux catégories : une catégorie $U_1$ constituée de $N_1$ boules et une catégorie $U_2$ constituée de $N_2$ boules. On pose $N = N_1 + N_2$ et $p = \frac{N_1}{N}$.

On tire au hasard et sans remise $n$ boules de l'urne et on considère la variable $X$ égale au nombre de boules de $U_1$ obtenues. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.