RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

VARIABLES ALEATOIRES

REELLES DISCRETES

VARIABLES ALEATOIRES REELLES DISCRETES

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

DEFINITION : *On dit que X est une variable aléatoire réelle (abrégé VAR) si pour tout réel x, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq x\}$ est un événement, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{T}$.*

Il est équivalent de dire : pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in I\}$ est un événement.

Remarque : **Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une VAR.**

Notations : Si A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, on notera

$(X \in A) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in A\}$. C'est en fait l'ensemble des antécédents par X des éléments de A.

Cas particuliers

$(X = a) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = a\} = (X \in \{a\})$, où a est un réel donné.

$(X \leq a) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq a\} = (X \in]-\infty, a])$, où a est un réel donné.

$(a \leq X < b) = \{\omega \in \Omega \ / \ a \leq X(\omega) < b\} = (X \in [a, b[)$, où a et b sont des réels donnés.

etc...

$X(\Omega)$ sera, comme pour les applications réelles, l'ensemble des images par X des éléments de Ω, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X.

VARIABLES DISCRETES

DEFINITION : *Soit X une VAR de Ω dans $\mathbb{R}$. On dit que X est une variable aléatoire réelle discrète (en abrégé VARD) si l'ensemble $X(\Omega)$ est dénombrable (fini ou non).*

Notations : Si $X(\Omega)$ est fini, on écrira $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, on écrira

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \ldots\}$ où $x_1 < x_2 < .. < x_n < \ldots$

LOI DE PROBABILITE D'UNE VARD

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X une VARD de Ω dans $\mathbb{R}$.

Notons $X(\Omega) = \{x_i \ , \ i \in I\}$ où I désigne l'ensemble des indices ; donc I sera $[\![1, n]\!]$ ou $\mathbb{N}^*$ en général.

DEFINITION : *.On appelle loi de probabilité de X la donnée de $\{(x_i, P(X = x_i) \ , i \in I\}$. C'est donc la donnée des couples des valeurs prises par X et des probabilités correspondantes.*

Propriétés d'une loi de probabilité d'une VARD

- $\forall x_i \in X(\Omega) \ , \ P(X = x_i) \geq 0$.
- $\{(X = x_i) \ , i \in I\}$ est un système complet d'événements. Donc

$$\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

Caractérisation d'une loi de probabilité d'une VARD

THEOREME : Soit $A = \{x_i \ , i \in I\}$ une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ et une application $f : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\sum_{i \in I} f(x_i) = 1$. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé ; il existe une VARD $X : \Omega \longrightarrow A$ telle que : $\forall i \in I, \ f(x_i) = P(X = x_i)$.

FONCTION DE REPARTITION

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et une VARD $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \ , (X \leq x)$ est un événement ; sa probabilité existe donc.

DEFINITION : *On appelle fonction de répartition de X l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ F(x) = P(X \leq x)$.*

On remarque que :

$$\boxed{P(X \leq x) = P\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq x\} = \sum_{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x} P(\{\omega\})}$$

PROPRIETES D' UNE FONCTION DE REPARTITION D' UNE VARD

- F est définie sur $\mathbb{R}$
- F est croissante
- F est en escalier
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- **Continuité**

Pour $\alpha \notin X(\Omega)$, F est continue en α.

Pour $\alpha \in X(\Omega)$, F est continue à droite, discontinue à gauche.

Caractérisation d'une fonction de répartition

Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ possédant les propriétés suivantes : F est croissante au sens large sur $\mathbb{R}$,

il existe une suite de réels $(a_i) \ , \ i \in I$ (en général $I = [\![1, n]\!]$ ou $\mathbb{N}^*$ ou très rarement $\mathbb{Z}$), croissante strictement, telle que F soit en escalier pour la suite $(a_i) \ , \ i \in I$ (F est constante sur $[a_i, a_{i+1}[$,

$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ **et** $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Alors F est la fonction de répartition d'une VARD d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

- **Détermination de la loi d'une VARD par la fonction de répartition :**

Dans les conditions du théorème précédent, on a :

$X(\Omega) = \{a_i\ ,\ i \in I\}$ et $P(X = a_i) = \lim_{x\to a_i^+} F(x) - \lim_{x\to a_i^-} F(x)$.

FONCTION D' UNE VARD

Soit X une VARD de Ω dans $\mathbb{R}$ et g une application définie sur $X(\Omega)$ (au moins), alors $Y = g \circ X$ est une VARD sur Ω, notée $g(X)$.

SOMME ET PRODUIT DE VARD

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des VARD de Ω dans $\mathbb{R}$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ et $X_1 \times \ldots \times X_n$ sont des VARD de Ω dans $\mathbb{R}$.

LOIS DISCRETES CLASSIQUES

On supposera donné l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

VARIABLE CERTAINE

DEFINITION : *X est une variable certaine si l'application X est constante*, donc s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) = a$; ce qui veut dire que $X(\Omega) = \{a\}$.

VARIABLE QUASI-CERTAINE

DEFINITION : *X est une variable certaine si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$*

VARIABLE UNIFORME

DEFINITION : *X est une variable uniforme discrète s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :*

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et si $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$.

Terminologie : Si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on dira que X suit la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$.

VARIABLE DE BERNOULLI

DEFINITION : *X est une variable de Bernoulli si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et s'il existe un nombre réel $p \in]0, 1[$ tel que $P(X = 1) = p$.*

Alors $P(X = 0) = 1 - p$, car $(X = 1) = \overline{(X = 0)}$.

Terminologie : On dira souvent que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on écrira $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$.

Cas général : *On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à 2 issues : succès, échec ; la probabilité du succés étant $p \in]0, 1[$.*

VARIABLE BINOMIALE

DEFINITION : *X est une variable binomiale s'il existe un nombre réel $p \in]0, 1[$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :*

$X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ *et* $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

On effectue, de manière indépendante les unes des autres, n épreuves de Bernoulli identiques et on note X la VARD égale au nombre de succès. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque : des tirages avec remise peuvent être considérés comme la répétition, de manière indépendante, d'une même épreuve de Bernoulli.

VARIABLE HYPERGEOMETRIQUE

DEFINITION : *X est une variable hypergéométrique s'il existe un entier non nul n, un entier non nul N , $n \leq N$, un réel $p \in]0,1[$ tels que :*

$Np \in \mathbb{N}^*, X(\Omega) \subset [\![0,n]\!]$ et

$$\forall k \in X(\Omega)\ , P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On vérifie que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$ (C'est la formule de Vandermonde).

On note $q = 1-p$, $N_1 = Np$, $N_2 = N(1-p)$ (donc la connaissance de N_1 et N détermine celle de p). On dira souvent que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N,n,p et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$.

$$X(\Omega) = [\text{Max}\,(0, n-N_2), \text{Min}\,(n, N_1)]$$

Cas général : On a une urne composée de boules indiscernables au toucher, divisée en deux catégories : une catégorie U_1 constituée de N_1 boules et une catégorie U_2 constituée de N_2 boules. On pose $N = N_1 + N_2$ et $p = \dfrac{N_1}{N}$.

On tire au hasard et sans remise n boules de l'urne et on considère la variable X égale au nombre de boules de U_1 obtenues. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$

VARIABLES GEOMETRIQUES

DEFINITION : *X est une variable géométrique sur $\mathbb{N}^*$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et s'il existe $p \in]0,1[$ tel que :*

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$.

Terminologie : On dira que X suit la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$ et on écrira $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Cas général : On effectue la même épreuve de Bernoulli de paramètre p jusqu'à l'obtention du succès ($p \in]0,1[$). X est la VARD qui compte le nombre d'épreuves qu'il a fallu faire pour obtenir le premier succès. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Il y a une autre loi géométrique, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

DEFINITION : *X est une variable géométrique sur $\mathbb{N}$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et s'il existe $p \in]0,1[$ tel que :*

$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = p(1-p)^n$.