RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

VARIABLES ALEATOIRES

REELLES DISCRETES

VARIABLES ALEATOIRES REELLES DISCRETES

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X une application de Ω dans $\mathbb{R}$.

DEFINITION : *On dit que X est une variable aléatoire réelle (abrégé VAR) si pour tout réel x, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq x\}$ est un événement, c'est-à-dire un élément de $\mathcal{T}$.*

Il est équivalent de dire : pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in I\}$ est un événement.

Remarque : **Si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, toute application de Ω dans $\mathbb{R}$ est une VAR.**

Notations : Si A est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, on notera

$(X \in A) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \in A\}$. C'est en fait l'ensemble des antécédents par X des éléments de A.

Cas particuliers

$(X = a) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) = a\} = (X \in \{a\})$, où a est un réel donné.

$(X \leq a) = \{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq a\} = (X \in]-\infty, a])$, où a est un réel donné.

$(a \leq X < b) = \{\omega \in \Omega \ / \ a \leq X(\omega) < b\} = (X \in [a, b[)$, où a et b sont des réels donnés.

etc...

$X(\Omega)$ sera, comme pour les applications réelles, l'ensemble des images par X des éléments de Ω, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X.

VARIABLES DISCRETES

DEFINITION : *Soit X une VAR de Ω dans $\mathbb{R}$. On dit que X est une variable aléatoire réelle discrète (en abrégé VARD) si l'ensemble $X(\Omega)$ est dénombrable (fini ou non).*

Notations : Si $X(\Omega)$ est fini, on écrira $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ où $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, on écrira

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \ldots\}$ où $x_1 < x_2 < .. < x_n < ...$

LOI DE PROBABILITE D'UNE VARD

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et X une VARD de Ω dans $\mathbb{R}$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Notons $X(\Omega) = \{x_i \ , \ i \in I\}$ où I désigne l'ensemble des indices ; donc I sera $[\![1, n]\!]$ ou $\mathbb{N}^*$ en général.

DEFINITION : *.On appelle loi de probabilité de X la donnée de $\{(x_i, P(X = x_i)) \ , i \in I\}$. C'est donc la donnée des couples des valeurs prises par X et des probabilités correspondantes.*

Propriétés d'une loi de probabilité d'une VARD

- $\forall x_i \in X(\Omega) \ , \ P(X = x_i) \geq 0.$
- $\{(X = x_i) \ , i \in I\}$ est un système complet d'événements. Donc

$$\sum_{i \in I} P(X = x_i) = 1$$

Caractérisation d'une loi de probabilité d'une VARD

THEOREME : Soit $A = \{x_i \ , i \in I\}$ une partie dénombrable de $\mathbb{R}$ et une application $f : A \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\sum_{i \in I} f(x_i) = 1$. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé ; il existe une VARD $X : \Omega \longrightarrow A$ telle que : $\forall i \in I, \ f(x_i) = P(X = x_i)$.

FONCTION DE REPARTITION

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé et une VARD $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R} \ , (X \leq x)$ est un événement ; sa probabilité existe donc.

DEFINITION : *On appelle fonction de répartition de X l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \ , \ F(x) = P(X \leq x)$.*

On remarque que :

$$P(X \leq x) = P\{\omega \in \Omega \ / \ X(\omega) \leq x\} = \sum_{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x} P(\{\omega\})$$

PROPRIETES D' UNE FONCTION DE REPARTITION D' UNE VARD

- F est définie sur $\mathbb{R}$
- F est croissante
- F est en escalier
- $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$
- **Continuité**

Pour $\alpha \notin X(\Omega)$, F est continue en α.

Pour $\alpha \in X(\Omega)$, F est continue à droite, discontinue à gauche.

Caractérisation d'une fonction de répartition

Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans $[0, 1]$ possédant les propriétés suivantes : F est croissante au sens large sur $\mathbb{R}$,

il existe une suite de réels $(a_i) \ , \ i \in I$ (en général $I = [\![1, n]\!]$ ou $\mathbb{N}^*$ ou très rarement $\mathbb{Z}$), croissante strictement, telle que F soit en escalier pour la suite $(a_i) \ , \ i \in I$ (F est constante sur $[a_i, a_{i+1}[$,

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Alors F est la fonction de répartition d'une VARD d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

- **Détermination de la loi d'une VARD par la fonction de répartition :**

Dans les conditions du théorème précédent, on a :

$X(\Omega) = \{a_i\ ,\ i \in I\}$ et $P(X = a_i) = \lim\limits_{x\to a_i^+} F(x) - \lim\limits_{x\to a_i^-} F(x)$.

FONCTION D' UNE VARD

Soit X une VARD de Ω dans $\mathbb{R}$ et g une application définie sur $X(\Omega)$ (au moins), alors $Y = g \circ X$ est une VARD sur Ω, notée $g(X)$.

SOMME ET PRODUIT DE VARD

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des VARD de Ω dans $\mathbb{R}$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ et $X_1 \times \ldots \times X_n$ sont des VARD de Ω dans $\mathbb{R}$.

LOIS DISCRETES CLASSIQUES

On supposera donné l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

VARIABLE CERTAINE

DEFINITION : *X est une variable certaine si l'application X est constante*, donc s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \omega \in \Omega\ ,\ X(\omega) = a$; ce qui veut dire que $X(\Omega) = \{a\}$.

VARIABLE QUASI-CERTAINE

DEFINITION : *X est une variable certaine si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$*

VARIABLE UNIFORME

DEFINITION : *X est une variable uniforme discrète s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :*

$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *et si* $\forall k \in [\![1, n]\!]\ ,\ P(X = x_k) = \dfrac{1}{n}$.

Terminologie : Si $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, on dira que X suit la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![1,n]\!]}$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$.

VARIABLE DE BERNOULLI

DEFINITION : *X est une variable de Bernoulli si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et s'il existe un nombre réel $p \in]0, 1[$ tel que $P(X = 1) = p$.*

Alors $P(X = 0) = 1 - p$, car $(X = 1) = \overline{(X = 0)}$.

Terminologie : On dira souvent que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p et on écrira $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ ou $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$.

Cas général : *On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à 2 issues : succès, échec ; la probabilité du succés étant $p\ \in]0, 1[$.*

VARIABLE BINOMIALE

DEFINITION : *X est une variable binomiale s'il existe un nombre réel $p \in]0, 1[$ et un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tels que :*

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

$X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ *et* $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

On effectue, de manière indépendante les unes des autres, n épreuves de Bernoulli identiques et on note X la VARD égale au nombre de succès. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque : des tirages avec remise peuvent être considérés comme la répétition, de manière indépendante, d'une même épreuve de Bernoulli.

VARIABLE HYPERGEOMETRIQUE

DEFINITION : *X est une variable hypergéométrique s'il existe un entier non nul n, un entier non nul N , $n \leq N$, un réel $p \in]0,1[$ tels que :*

$Np \in \mathbb{N}^*, X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et

$$\forall k \in X(\Omega) \ , P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On vérifie que $\sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$ (C'est la formule de Vandermonde).

On note $q = 1-p$, $N_1 = Np$, $N_2 = N(1-p)$ (donc la connaissance de N_1 et N détermine celle de p). On dira souvent que X suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n, p et on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$.

$$X(\Omega) = [\mathrm{Max}(0, n - N_2), \mathrm{Min}(n, N_1)]$$

Cas général : On a une urne composée de boules indiscernables au toucher, divisée en deux catégories : une catégorie U_1 constituée de N_1 boules et une catégorie U_2 constituée de N_2 boules. On pose $N = N_1 + N_2$ et $p = \frac{N_1}{N}$.

On tire au hasard et sans remise n boules de l'urne et on considère la variable X égale au nombre de boules de U_1 obtenues. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, n, p)$

VARIABLES GEOMETRIQUES

DEFINITION : *X est une variable géométrique sur $\mathbb{N}^*$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et s'il existe $p \in]0,1[$ tel que :*

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$.

Terminologie : On dira que X suit la loi géométrique de paramètre p sur $\mathbb{N}^*$ et on écrira $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Cas général : On effectue la même épreuve de Bernoulli de paramètre p jusqu'à l'obtention du succès ($p \in]0,1[$). X est la VARD qui compte le nombre d'épreuves qu'il a fallu faire pour obtenir le premier succès. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Il y a une autre loi géométrique, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

DEFINITION : *X est une variable géométrique sur $\mathbb{N}$ si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et s'il existe $p \in]0,1[$ tel que :*

$\forall n \in \mathbb{N}, \ P(X = n) = p(1-p)^n$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.