RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

PROBABILITES CLASSIQUES

PROBABILITES DES EVENEMENTS

NOTIONS D'EVENEMENTS

DEFINITIONS : *Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat ne dépend que du hasard.*

On appelle univers associé à une expérience aléatoire l'ensemble, noté Ω, de tous les résultats possibles.

Quelques exemples classiques d'univers

Lorsque l'on jette une pièce de monnaie on pourra prendre pour univers : $\Omega = \{P, F\}$.

Lorsque l'on jette un dé à 6 faces, on pourra prendre pour univers : $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\} = [\![1, 6]\!]$.

Terminologie : Les éléments e_k de Ω s'appellent les éventualités.

Lorsqu'on lance 3 dés normaux identiques. On a deux possibilités :

- On les lance l'un après l'autre, et on peut prendre $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$.
- On les lance en même temps. On peut considérer, sans changer l'expérience que les dés sont différentiables (couleurs différentes ou qu'on les lance en fait successivement) : on pourra prendre encore $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$

DEFINITION : *Un événement est une partie de l'univers.*

Il est constitué d'un certain nombre (peut-être infini) d'éventualités. Soit A un événement ; A est inclus dans Ω, et si $A = \{e_1, \ldots, e_k \ldots\}$, on peut dire que A est la réunion des singletons $\{e_k\}$. $A = \bigcup_{e_i \in A} \{e_i\}$. Dès qu'une éventualité qui compose A est réalisée, A est lui-même réalisé.

Evénements particuliers

$\emptyset$ ne comporte aucune éventualité, il ne peut pas se réaliser, c'est l'événement impossible.

Ω est l'événement certain, car, quand on effectue l'expérience, une éventualité apparaît, donc Ω est réalisé.

Le singleton $\{e_k\}$ est un évènement réduit à une éventualité ; c'est un événement élémentaire.

ALGEBRE (OU TRIBU) DES EVENEMENTS

DEFINITION : *Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. On appelle ensemble des événements associés à cette expérience, toute partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) $\Omega \in \mathcal{T}$ $\big(\Omega$ *est un événement*$\big)$

(2) $\forall A \in \mathcal{T},\ \overline{A} \in \mathcal{T}$ $\big(\overline{A}$ *est l'événement contraire de* A*, constitué de toutes les éventualités de* Ω *qui ne sont pas dans* A*, noté aussi* $\Omega \setminus A\big)$

(3) *Pout toute suite* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{T}$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \in \mathcal{T}$

Terminologie : une telle partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ s'appelle une tribu ou une σ-algèbre.

On a les propriétés suivantes :

(a) $\emptyset \in \mathcal{T}$

(b) Pour toute suite (B_n) d'éléments de $\mathcal{T}$, $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n \in \mathcal{T}$

(c) $\forall (A,B) \in \mathcal{T}^2, A \setminus B = A \cap \overline{B} \in \mathcal{T}$

THEOREME : Si les singletons sont des événements et si Ω est fini ou dénombrable, la tribu des événements est $\mathcal{P}(\Omega)$.

DEFINITION : *On appelle espace probabilisable associé à une expérience aléatoire la donnée de l'univers Ω et d'une tribu $\mathcal{T}$ des événements.*

Nous l'écrirons $(\Omega, \mathcal{T})$.

OPERATIONS SUR LES EVENEMENTS

Soit A et B deux événements.

- L'événement $A \cap B$ représente la réalisation simultanée de A et de B.

Quand $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont incompatibles.

Les événements élémentaires correspondant à 2 éventualités différentes sont incompatibles.

- L'événement $\overline{A}$, constitué des éventualités de Ω qui ne sont pas dans A, s'appelle l'événement contraire de A. Du point de vue ensembliste, c'est le complémentaire de A dans Ω.

A et $\overline{A}$ sont incompatibles.

- L'événement $A \cup B$ représente la réalisation d'au moins un de ces 2 événements. Il n'est pas exclu qu'il y ait des éventualités communes à A et B.
- L'événement $A \setminus B$ (noté aussi $A - B$) représente la réalisation de A, mais pas celle de B ; on peut donc écrire $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Règles opératoires :

Pour tous événements A, B, C, on a les règles suivantes (qui sont les règles de calcul sur les sous-ensembles) :

$A \cap A = A \cup A = A$
$A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ ce sont les commutativités
$A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cap \Omega = A$
$A \cup \emptyset = A$; $A \cup \Omega = \Omega$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$;

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ Ce sont les associativités.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ce sont les distributivités d'une opération sur l'autre.

$A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$; **lois de Morgan.**

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (très utiles). Ces formules se généralisent à une famille quelconque (finie ou infinie) d'événements.

Soit $((A_i), i \in J)$ une famille d'événements (J est l'ensemble des indices ; J pourra être $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$, ou une partie non vide de $\mathbb{N}$).

$\overline{\bigcup_{k \in J} A_k} = \bigcap_{k \in J} \overline{A_k}$; $\overline{\bigcap_{k \in J} A_k} = \bigcup_{k \in J} \overline{A_k}$.

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable. J a la signification précédente.

DEFINITION : *On appelle système complet d'événements, toute famille $(A_i), i \in J$ finie ou dénombrable d'événements, formant une partition de Ω, c'est-à-dire vérifiant :*

(1) $\forall (i,j) \in J^2, i \neq j \; A_i \cap A_j = \emptyset$

(2) $\forall i \in J, A_i \neq \emptyset$.

(3) $\bigcup_{i \in J} A_i = \Omega$

Remarque : si $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, La famille constituée par tous les événements élémentaires de Ω forme un système complet d'événements.

Application : Soit B un événement et $(A_i), i \in J$ un système complet d'événements : $B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i \in J} A_i \right) = \bigcup_{i \in J} (A_i \cap B)$.

Remarque : En général J sera inclus dans $\mathbb{N}$ mais il n'est pas interdit que ce soit une partie de $\mathbb{Z}$.

PROBABILITES DES EVENEMENTS

DEFINITION : *Etant donné un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{T})$, on appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$ toute application, notée P, de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}$, satisfaisant aux conditions suivantes* :

1) $\forall A \in \mathcal{T}, \; P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega) = 1$

3) Soit $(A_i)_{i \in I \subset N, I \, \text{infini}}$, 2 à 2 incompatibles, alors