RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

APPLICATIONS

DENOMBREMENT

ENSEMBLES

DEFINITION : *Un ensemble est une collection d'objets appelés éléments de l'ensemble. Si x est un élément d'un ensemble E, on note : $x \in E$, sinon on note $x \notin E$.*

L'ensemble qui n'a pas d'éléments est l'ensemble vide et se note $\emptyset$.

ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

DEFINITION : *On dit qu'un ensemble A est un sous-ensemble d'un ensemble E (ou une partie de E) si A est vide ou si tout élément de A appartient à E. On notera $A \subset E$.*

Le symbole $\exists$ veut dire " il existe " et le symbole / veut dire " tel que ".

Pour démontrer que 2 ensembles A et B de E sont égaux, on pourra montrer que $A \subset B$ et $B \subset A$.

DEFINITION : *Etant donné un ensemble E, on appelle ensemble des parties de E l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles (ou les parties) de E. Ce nouvel ensemble se note $\mathcal{P}(E)$.*

Si x est un élément de E, la partie de E qui ne contient que l'élément x se notera $\{x\}$; c'est un sous ensemble à un seul élément, appelé singleton, c'est un élément de $\mathcal{P}(E)$, ce n'est pas un élément de E.

Exemple : Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors

$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$.

OPERATIONS SUR LES ENSEMBLES

Remarque : les définitions suivantes sont valables pour des ensembles ou des sous-ensembles d'un ensemble.

- **Union ou réunion :** *Soit A et B deux ensembles. L'union de A et de B est l'ensemble formé des éléments appartenant à A ou à B. Cet ensemble est noté $A \cup B$.*

On peut donc écrire $A \cup B = \{x \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

Remarque : Si $A \subset B$, alors $A \cup B = B$. Donc $\forall A \in \mathcal{P}(E)$,
$A \cup E = E$ et $A \cup \emptyset = A$.

- **Intersection :** *Soit A et B deux ensembles. L'intersection de A et de B est l'ensemble formé des éléments appartenant à A et à B. Cet ensemble est noté $A \cap B$.*

On peut donc écrire $A \cap B = \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$; ce sont les éléments communs à A et B.

Remarque : Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$. Donc $\forall A \in \mathcal{P}(E)$,
$A \cap E = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$.

- **Complémentaire :** *Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle complémentaire de A dans E la partie de E formée des éléments de E qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$* ou $C_E(A)$

On peut donc écrire $\overline{A} = \{x \in E \ / \ x \notin A\}$.

- **Différence :** *Soit A et B deux ensembles. La différence de A et de B est l'ensemble formé des éléments appartenant à A et n'appartenant pas à B. Cet ensemble est noté $A - B$.*

On peut écrire A-$B = \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \notin B\} = A \cap \overline{B}$, où $\cap\overline{B}$ représente le complémentaire de B dans $A \cup B$

- **Différence symétrique :** *Soit A et B deux ensembles. La différence symétrique de A et de B est l'ensemble formé des éléments appartenant à $A \cup B$ et n'appartenant pas à $A \cap B$. Cet ensemble est noté $A\Delta B$.*

On peut écrire $A\Delta B = \{x \ / \ x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B\}$

$A\Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$; il est facile alors de constater que $A\Delta B = B\Delta A$:

Quelques propriétés utiles

- **L'union et l'intersection sont commutatives**

Soit A et B deux ensembles, $\begin{cases} A \cup B & = & B \cup A \\ A \cap B & = & B \cap A \end{cases}$

- **L'union et l'intersection sont associatives**

Soit A, B, C trois ensembles, $\begin{cases} (A \cup B) \cup C & = & A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C & = & A \cap (B \cap C) \end{cases}$

- **L'union est distributive par rapport à l'intersection et vice-versa :**

Soit A, B, C trois ensembles, $\begin{cases} A \cup (B \cap C) & = & (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) & = & (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

- $A \subset B \Longleftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$.

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n ensembles.

$\overline{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}$

$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_n}$

Remarque : On peut généraliser ces deux dernières propriétés à une famille quelconque (même infinie) d'ensembles.

DEFINITION : Produit cartésien : *Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ n ensembles non vides, on appelle produit cartésien des ensembles $E_1, E_2, , , E_n$ l'ensemble noté $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ formé des listes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i \in E_i$. On peut écrire*

$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ / \ \forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i \in E_i\}$.

Remarque : Si pour tout $i \in [\![1, n]\!], E_i = E$, alors $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ se note E^n

FONCTIONS, APPLICATIONS

DEFINITION : Fonctions : *Une fonction f d'un ensemble E dans un ensemble F (supposés tous les 2 non vides) associe, à tout élément de E* **au plus** *un élément de F.*

Si l'élément x de E est associé à l'élément y de F, on écrit $y = f(x)$: y s'appelle l'image par f de x, x s'appelle un antécédent de y par f.

Un élément de E a donc une image ou aucune image. Un élément de F n'a pas forcément d'antécédent par f, mais il peut aussi en avoir plusieurs.

Terminologie : L'ensemble des éléments de E qui ont une image par f s'appelle l'ensemble de définition de f. On le note D_f.

L'ensemble des éléments de F qui ont un antécédent par f s'appelle image de f et se note $f(E)$ ou $\text{Im}(f)$.

DEFINITION : Applications : *Une application d'un ensemble E dans un ensemble F est une fonction de E dans F dont l'ensemble de définition est E.* Autrement dit, tout élément de E a une image (et une seule).

DEFINITION : Image d'une partie de E : *Soit A une partie de E et f une application de E dans F. On appelle image de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A.* On le note $f(A)$.

$f(A) = \{y \in F \ / \ \exists x \in A \ / \ y = f(x)\} = \{f(x) \ / \ x \in A\}$.

Donc $y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A \ / \ y = f(x)$.

DEFINITION : Image réciproque : *Soit $B \subset F$ et f une application de E dans F. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble des antécédents par f des éléments de B.* On le note $f^{-1} < B >$.

$f^{-1} < B > = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\}$; $x \in f^{-1} < B > \Longleftrightarrow f(x) \in B$.

COMPOSEE D'APPLICATIONS : Soit E, F, G trois ensembles non vides (qui ne sont pas forcément distincts), f une application de E dans F et g une application de F dans G.

DEFINITION : *On appelle composée de f par g et on note $g \circ f$ l'application de E dans G définie par : $\forall x \in E, \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Associativité :

- E, F, G, H sont 4 ensembles non vides, f, g, h 3 applications respectivement de E dans F, de F dans G, de G dans H.

$(h \circ (g \circ f)) = ((h \circ g) \circ f)$. On dit que la composition des applications est associative.

APPLICATIONS INJECTIVES, SURJECTIVES, BIJECTIVES

Applications injectives : Soit f une application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F.

DEFINITION : *On dit que f est injective si 2 éléments distincts de E ont toujours 2 images distinctes par f.*

$(f \text{ est injective}) \Longleftrightarrow \left(\forall (x,y) \in E^2, x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)\right)$
ou $(f \text{ est injective}) \Longleftrightarrow \left(\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y\right)$
Pour f injective, on dira aussi que f est une injection.

Remarque : dire que f n'est pas injective signifie qu'il existent 2 éléments distincts de E (au moins) qui ont la même image par f

PROPOSITION : La composée d'un nombre fini d'injections est une injection

Applications surjectives : Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.

DEFINITION : *On dit que f est surjective (sur F) si et seulement si tout élément de F admet (au moins) un antécédent dans E.*

Autrement dit : $\left(\forall y \in F,\ \exists x \in E \ / \ y = f(x)\right)$ ou $f(E) = F$.

Remarque : f n'est pas surjective si $\exists y \in F \ / \ \forall x \in E, f(x) \neq y$.

Pour f surjective, on dira aussi f est une surjection de E sur F.

PROPOSITION: La composée d'un nombre fini de surjections est une surjection

Applications bijectives : Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. *On dit que f est bijective (ou est une bijection) de E sur F si et seulement si* $\forall y \in F,\ \exists! x \in E \ / \ y = f(x)$.

Autrement dit, tout élément de F admet un unique antécédent dans E

Le symbole $\exists!$ veut dire " il existe un unique ".

Il est équivalent de dire f bijective et "f est injective et surjective" .

PROPOSITION : La composée d'un nombre fini de bijections est une bijection

Application réciproque d'une bijection : Soit f une bijection de E sur F. A tout élément y de F, on associe son unique antécédent $x \in E$. On définit ainsi une application $y \longmapsto x$, de F dans E.

DEFINITION : *L'application $y \in F \longmapsto x \in E \ / \ y = f(x)$, s'appelle l'application réciproque de f.* On la note f^{-1} ; elle pourrait prendre le nom d'application antécédent, car elle associe à y son antécédent.

Donc, écrire $x = f^{-1}(y)$ équivaut à $y = f(x)$.

PROPOSITION : Si f est une bijection de E sur F, alors f^{-1} est une bijection de F sur E.

Remarque : $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.

DEFINITION : *S'il existe une bijection entre 2 ensembles E et F, on dit que E est F sont équipotents.*