RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES REELLES

DISTANCE

DEFINITION : *On appelle distance sur $\mathbb{R}^2$, toute application, notée d, de $(\mathbb{R}^2)^2$ dans $\mathbb{R}$, possédant les propriétés suivantes :*

1) $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ d(u,v) \geq 0.$

2) $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ (d(u,v)=0) \iff (u=v).$

3) $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ d(u,v) = d(v,u).$

4) $\forall (u,v,w) \in (\mathbb{R}^2)^3,\ d(u,v) \leq d(u,w)+d(w,v).$

Remarque : La propriéte **2)** s'appelle l'axiome de séparation, la propriété **3)** s'appelle la symétrie, la propriété **4)** s'appelle l'inégalité triangulaire.

LA DISTANCE EUCLIDIENNE d_2.

Pour tout $u=(x,y)$ et $v=(a,b)$ éléments de $\mathbb{R}^2$,

$$d_2(u,v) = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}.$$

On convient d'identifier (x,y) avec le point M du plan de coordonnées (x,y) dans un repère orthonormé du plan. Notons A le point de coordonnées (a,b), on voit que $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = AM$ (longueur du segment $[AM]$). C'est la seule distance utilisée en voie E.

Remarque : Pour la voie S, la distance est aussi le distance euclidienne : la seule différence est qu'elle est présentée comme la norme euclidienne de $u-v$. Nous noterons encore d_2 cette distance.

BOULES

DEFINITIONS

Boule ouverte : Soit $u_0 = (x_0,y_0)$ un élément de $\mathbb{R}^2$

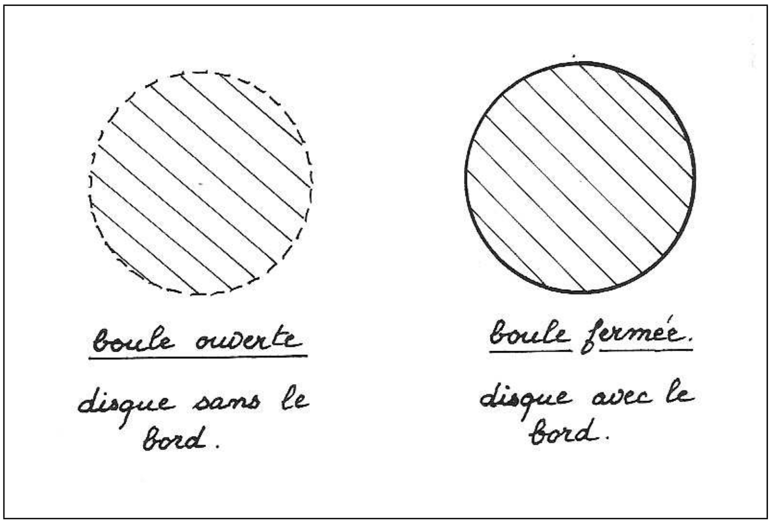
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, *on appelle boule ouverte de centre u_0 de rayon ε, l'ensemble, noté $B(u_0,\varepsilon)$, des couples $u \in \mathbb{R}^2$, tels que $d_2(u_0,u) < \varepsilon$.* D'où $B(u_0,\varepsilon) = \{u \in \mathbb{R}^2\ /\ d(u_0,u) < \varepsilon\}$.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

Boule fermée :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, *On appelle boule fermée de centre* u_0 *de rayon* ε*, l'ensemble, noté* $B'(u_0, \varepsilon)$*, des couples* $u \in \mathbb{R}^2$*, tels que* $d_2(u_0, u) \leq \varepsilon$*.* D'où $B'(u_0, \varepsilon) = \{u \in \mathbb{R}^2 \ / \ d(u_0, u) \leq \varepsilon\}$.

Représentation géométrique



PROPRIETES

Soit $u_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon, \varepsilon_1$ deux réels strictement positifs.

$B(u_0, \varepsilon) \cap B(u_0, \varepsilon_1) = B(u_0, \varepsilon_0)$ où $\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon, \varepsilon_1)$ ($\inf(\varepsilon, \varepsilon_1)$ étant le plus petit des 2 réels ε et ε_1).

$B(u_0, \varepsilon) \subset B'(u_0, \varepsilon)$

PARTIES OUVERTES

DEFINITION : *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}^2$*.* A *est une partie ouverte de* E *si et seulement si* A *est vide ou pour tout* $u \in A$*,* $\exists \alpha > 0 \ / \ B'(u, \alpha) \subset A$*.*

Une boule ouverte est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Remarque : On peut également dire A est une partie ouverte de E si et seulement si A est vide ou pour tout $u \in A$, $\exists \alpha > 0 \ / \ B(u, \alpha) \subset A$.

PROPRIETES

- La réunion d'un nombre quelconque de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
- L'intersection d'un nombre fini de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Remarque : Une partie ouverte est en général caractérisée par des inégalités strictes.

- Une boule fermée n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

PARTIES FERMEES

DEFINITION : *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. A est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.*

Une boule fermée est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

PROPRIETES

- La réunion d'un nombre fini de parties fermées de $\mathbb{R}^2$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
- L'intersection d'un nombre quelconque de parties fermées de $\mathbb{R}^2$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}^2$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
- L'ensemble vide est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Cela peut paraître bizarre, mais c'est ainsi. Que le lecteur se " rassure " , $\mathbb{R}^2$ et $\emptyset$ sont les deux seules parties de $\mathbb{R}^2$ qui sont à la fois ouvertes et fermées.

Remarque : • Une partie fermée est en général caractérisée par des inégalités larges.

• Si une partie de $\mathbb{R}^2$ est ouverte (resp fermée) pour une distance, elle l'est aussi pour toute autre distance sur $\mathbb{R}^2$.

PARTIES BORNEES

DEFINITION : *Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est bornée si et seulement s'il existe une boule fermée (ou ouverte) telle que A soit incluse dans cette boule.*

A est bornée si et seulement si $\exists\, u_0 \in \mathbb{R}^2,\ \exists\, \alpha > 0\ /\ A \subset B(u_0, \alpha)$.

Remarque : • Si une partie de $\mathbb{R}^2$ est bornée pour une distance, elle l'est aussi pour toute autre distance sur $\mathbb{R}^2$.

Il est équivalent de dire $\exists\, M \geq 0,\ /\ \forall u = (x, y) \in A,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq M$.

LIMITE

DEFINITION : *Soit A une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$ et f une application de A dans $\mathbb{R}$. Soit $u_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'un nombre réel ℓ est limite de f en (x_0, y_0) si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0\ /\ \forall (x, y) \in B'(u_0, \alpha) \cap A,\ |f(x, y) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ecritures : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$ ou $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f = \ell$

ou $f(x, y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\longrightarrow} \ell$.

THEOREME : Si une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admet en un point (x_0, y_0) une limite réelle, cette limite est unique.

OPERATIONS SUR LES LIMITES FINIES

Ce sont les mêmes que pour les fonctions réelles. Somme, produit, quotient (la limite du dénominateur étant non nulle), racine carrée d'une fonction positive, produit par un réel, puissance.

On montre, comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que si $u_0 \in D_f$ et si f admet une limite réelle en u_0, nécessairement cette limite est égale à $f(u_0)$.

EXTENSION : *On dit qu'une fonction f définie sur une partie ouverte non vide $A \subset \mathbb{R}^2$ a pour limite $+\infty$ en $u_0 = (x_0, y_0)$ si et seulement si*
$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \ \forall u = (x, y) \in A \cap B'(u_0, \alpha), \ f(x, y) \geq B.$

On dit qu'une fonction f définie sur une partie ouverte non vide $A \subset \mathbb{R}^2$ a pour limite $-\infty$ en $u_0 = (x_0, y_0)$ si et seulement si
$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \ \forall u = (x, y) \in A \cap B'(u_0, \alpha), \ f(x, y) \leq B.$

CONTINUITE

DEFINITIONS : Soit A une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit f une application de A dans $\mathbb{R}$ *et $u_0 = (x_0, y_0) \in A$. On dit que f est continue en (x_0, y_0) si et seulement si* $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

OPERATIONS

Ce sont les mêmes que pour les fonctions réelles : la somme, le produit de fonctions continues sur A est une fonction continue sur A. Le produit d'une fonction continue sur A par un réel est une fonction continue sur A . Le quotient de 2 fonctions continues sur A est une fonction continue sur A , pourvu que le dénominateur ne s'annule pas.

La racine carrée d'une fonction, positive, continue sur A est continue en A.

- **COMPOSITION DES FONCTIONS CONTINUES**

1) Soit I un intervalle ouvert, non vide, de $\mathbb{R}$ et u et v, deux applications de I dans $\mathbb{R}$.

Considérons une partie A de $\mathbb{R}^2$, ouverte, non vide et une application f continue de A dans $\mathbb{R}$. Posons, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = (u(t), v(t))$; autrement dit, φ est une application de I dans $\mathbb{R}^2$. **Supposons que** $\forall t \in I, \ \varphi(t) \in A$.

La composée $g = f \circ \varphi$ est alors une application de I dans $\mathbb{R}$.

On montre que si u et v sont continues sur I et si f est continue sur A, $g : t \longmapsto f(u(t), v(t))$ est continue sur I.

2) Considérons une partie A de $\mathbb{R}^2$, ouverte, non vide et une application f de A dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle ouvert, non vide, de $\mathbb{R}$ et u une application de I dans $\mathbb{R}$. **Supposons que** $\forall (x, y) \in A, \ f(x, y) \in I$. La composée $g = u \circ f$ est alors une application de A dans $\mathbb{R}$.

On montre que si u est continue sur I et f continue sur A, $g : (x, y) \longmapsto u(f(x, y))$ est continue sur A.

THEOREME : Toute fonction continue sur une partie F de $\mathbb{R}^2$ fermée, bornée admet un maximum et un minimum : c'est-à-dire qu'il existe $(u_1, u_2) \in F^2$ /

$$\forall u \in F, \ f(u_1) \leq f(u) \leq f(u_2)$$

FONCTIONS CONTINUES DE REFERENCE

DEFINITION : *On appelle polynôme en x, y toute application polynôme en x dont les coefficients sont des polynômes en y.*

Remarque : Il est équivalent de dire *un polynôme en x, y est une application polynôme en y dont les coefficients sont des polynômes en x.*

En utilisant les régles de calculs dans $\mathbb{R}$, un polynôme en x, y est une combinaison linéaire de termes de la forme $x^i y^j$, où i et j sont des entiers naturels.

- Les polynômes en x, y sont continus en tout point de $\mathbb{R}^2$.
- Les fractions rationnelles en x, y (quotient de deux polynômes en (x, y)) sont continues en tout point de leur ensemble de définition.
- Si f est continue sur A, $|f|$ aussi.
- Si P est un polynôme en x, y, e^P est continue en tout point de $\mathbb{R}^2$, et $\ln|P|$ est continue en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ / $P(x, y) \neq 0$.

DERIVEES PARTIELLES D'ORDRE 1

DEFINITION : Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur une partie ouverte , non vide, A de $\mathbb{R}^2$ et soit $u_0 = (x_0, y_0)$ un élément de A.

On dit que f est dérivable par rapport à x en u_0 si et seulement si

$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$ *existe et est un nombre réel.*

Quand la limite précédente existe et est réelle, on la note $f'_x(x_0, y_0)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$.

On dira aussi que f admet en u_0 une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x (ou en x).

On dit que f est dérivable par rapport à y en u_0 si et seulement si

$\lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$ *existe et est un nombre réel.*

Quand la limite précédente existe et est réelle, on la note $f'_y(x_0, y_0)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim\limits_{y \to y_0} \dfrac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$. On dira aussi que f admet en u_0 une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y (ou en y).

Interprétation : Notons $f_1 : x \longmapsto f(x, y_0)$. f admet en (x_0, y_0) une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x si et seulement si la fonction f_1 est dérivable en x_0. Dans ces conditions, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_1(x_0)$.

On a le même résultat pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$: f admet en (x_0, y_0) une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y si et seulement si la fonction f_2 définie par $f_2 : y \longmapsto f_2(y) = f(x_0, y)$ est dérivable en y_0. Dans ces conditions, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = {f_2}'(y_0)$.

FONCTIONS DERIVES PARTIELLES D'ORDRE 1

DEFINITION : *Soit f une fonction définie sur une partie ouverte, non vide, A de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\forall (x_0, y_0) \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe. On définit, de ce fait, une application $(x, y) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ de A dans $\mathbb{R}$. Cette application s'appelle la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x et elle se note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.*

On dira, dans ces conditions, que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à x sur A.

- On a la même définition pour la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à y.

OPERATIONS SUR LES DERIVEES PARTIELLES

On considère une partie A, ouverte, non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit f et g deux fonctions définies sur A. On suppose que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ existent. On aura les mêmes résultats pour les dérivées partielles par rapport à y.

OPERATIONS ALGEBRIQUES

$\dfrac{\partial (f+g)}{\partial x}$ existe et $\dfrac{\partial (f+g)}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial x}$.

Si λ est un réel $\dfrac{\partial (\lambda f)}{\partial x}$ existe et $\dfrac{\partial (\lambda f)}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

$\dfrac{\partial (f \times g)}{\partial x}$ existe et $\dfrac{\partial (f \times g)}{\partial x} = (\dfrac{\partial f}{\partial x}) \times g + f \times \dfrac{\partial g}{\partial x}$.

Si g n'est jamais nulle sur A, $\dfrac{\partial (\frac{f}{g})}{\partial x} = \dfrac{g \times \dfrac{\partial f}{\partial x} - f \times \dfrac{\partial g}{\partial x}}{g^2}$.

COMPOSITION : Soit f une fonction définie sur une partie A ouverte de $\mathbb{R}^2$ et g une fonction réelle définie sur une partie E de $\mathbb{R}$. On suppose que f admet sur A des dérivées partielles d'ordre 1 en x et en y, $f(A) \subset E$ et g dérivable sur E.

On montre qu'alors $g \circ f$ est définie sur A et y admet des dérivées partielles d'ordre 1 données par les formules : $\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial x} = g' \circ f \times \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial (g \circ f)}{\partial y} = g' \circ f \times \dfrac{\partial f}{\partial y}$.

- Soit u et v deux applications définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in I$, $(u(t), v(t)) \in A$, partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. ON suppose u et v dérivables sur I. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur A. On suppose que f admet sur A des dérivées partielles d'ordre 1. Alors la fonction $\varphi\ :\ t \longmapsto \varphi(u(t), v(t))$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I,\ \varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(t), v(t)) \times u'(t) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(t), v(t)) \times v'(t)$$

FONCTIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^1$

DEFINITION : *Soit f une fonction définie sur une partie ouverte A de $\mathbb{R}^2$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si et seulement si f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ sur A et si ces dernières sont des fonctions continues sur A.*

Conséquences

Les polynômes des 2 variables x et y sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Les fractions rationnelles en x, y (quotients de 2 polynômes en x, y) sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition (dont on montre que c'est toujours une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$).

Opérations : Ce sont les mêmes que pour les dérivées partielles.

DEVELOPPEMENT LIMITE A L'ORDRE 1

DEFINITION : *Soit f une fonction définie sur une partie ouverte non vide A de $\mathbb{R}^2$ et $u_0 = (x_0, y_0)$ un élément de A. On dit que f admet en u_0 un développement limité à l'ordre 1, s'il existe une boule fermée de rayon $\alpha > 0$, une fonction ε de $B'((0,0), \alpha)$ dans $\mathbb{R}$, deux réels a et b tels que :* $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ et $\forall (h,k) \in B'((0,0), \alpha)$,

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + d_2(h,k)\varepsilon(h,k)$$

ou

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + ah + bk + \sqrt{h^2 + k^2}\varepsilon(h,k).$$

Si f admet un DL d'ordre 1 en (x_0, y_0), alors

1) f est continue en (x_0, y_0)

2) f admet en u_0 des dérivées partielles à l'ordre 1 par rapport à x et y, et on a la relation :

$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(u_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(u_0)k + (\sqrt{h^2 + k^2})\varepsilon(h,k)$, où ε est une fonction définie sur une boule fermée de centre $(0,0)$ et ayant 0 pour limite en $(0,0)$.

Notations : On note souvent $h = dx$ et $k = dy$; on a alors l'égalité suivante :

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(u_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(u_0)dy + (\sqrt{dx^2 + dy^2})\varepsilon(dx, dy).$$

Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en tout point $u = (x, y)$ de A, on a l'écriture :

$$f(x + dx, y + dy) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy + \sqrt{dx^2 + dy^2}\varepsilon(dx, dy).$$

- Comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on notera