RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

INTEGRALES IMPROPRES

INTEGRALES GENERALISEES OU IMPROPRES

INTEGRATION DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

FONCTIONS EN ESCALIER

DEFINITION : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et J un ensemble d'indices fini ou égal à $\mathbb{N}$, $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ une suite strictement croissante de réels (avec la convention que si $I =]-\infty; b]$ ou $]-\infty, b[$, alors $a_0 = -\infty$ et $a_k \in I$ pour $k \geq 1, k \in J$). On dit que f est en escalier sur I pour la subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ si f est constante sur les intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ pour tout $k \in J$.*

Donc $\forall k \in J,\ \exists \alpha_k \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in]a_k, a_{k+1}[, f(x) = \alpha_k$.

Cas particulier : *Soit une fonction f, définie sur $I = [a, b]$. On dit que f est en escalier sur I, s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \dots, a_n)$ de I, telle que f soit constante sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[,\ 0 \leq k \leq n-1$.*

Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \exists \alpha_k \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in]a_k, a_{k+1}[, f(x) = \alpha_k$.

FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

Soit deux réels a et b tels que $a < b$ et soit $I = [a; b]$ un segement. Considérons une fonction f définie sur I.

DEFINITION : *On dit que f est continue par morceaux sur I, s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \dots a_n)$ de $[a, b]$ telle que, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction f_k de f à l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, soit continue sur cet intervalle et possède des limites finies à droite et à gauche des points a_k pour $1 \leq k \leq n-1$ et f doit avoir des limites réelles en $a_0 = a$ à droite et en $a_n = b$ à gauche.*

Concrètement cela veut dire que f est continue sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ et que la restriction de f à $]a_k, a_{k+1}[$ est prolongeable par continuité aux points a_k et a_{k+1}.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Remarque : On peut généraliser la définition en considérant une subdivision formée d'un ensemble dénombrable de points
$\mathcal{S} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$: les conditions restant les mêmes.

Toute fonction continue sur I est continue par morceaux sur I, quelle que soit la subdivision considérée et une fonction en escalier est continue par morceaux.

Une autre présentation : *On dit que f est continue par morceaux sur I, s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \ldots a_n)$ de $[a, b]$, si $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ il existe une fonction φ_k définie, continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ et telle que la restriction de f à $]a_k, a_{k+1}[$ soit égale à φ_k*

DEFINITION : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ autre qu'un segment. On dit que f est continue par morceaux sur I si et seulement si la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.*

INTEGRATION

- Soit a et b deux réels $a < b$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b]$, pour une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \ldots, a_n)$. Notons f_k la restriction de f à à l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, pour $0 \leq k \leq n-1$.

On peut calculer $A(S) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x)dx$, puisqu'il s'agit d'une somme d'intégrales de fonctions continues sur un segment (en effet f_k est prolongeable par continuité sur $[a_k, a_{k+1}]$)

DEFINITION : *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ la quantité $A(S)$, pour n'importe quelle subdivision $\mathcal{S}$, pour laquelle f est continue par morceaux.*

Ecriture

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x)dx$$

(cette dernière par abus d'écriture)

L'utilisation de cette notion sera très utile en Probabilités.

PROPRIETES

- Soit f et g continues par morceaux sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et λ un réel, alors

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

- La relation de Chasles est valable.
- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ $(a < b)$

$$f \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ $(a<b)$, alors $|f|$ est aussi continue par morceaux (pour la même subdivision d'ailleurs) et on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

- Soit f et g continues par morceaux sur $[a,b]$ $(a<b)$, alors

$$f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$; alors f est bornée sur $[a,b]$. Dans ces conditions, il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que $|f| \leq M$ sur $[a,b]$.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)M.$$

INTEGRALES IMPROPRES

CONVERGENCE, DIVERGENCE

CONVERGENCE

DEFINITIONS :

- Soit a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction continue sur $]a,b]$. *On dit que l'intégrale* $I = \int_a^b f(t)dt$ *est convergente (ou existe) si et seulement si* $\lim\limits_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$ *existe et est réelle.* Dans ce cas, on écrira $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$.

Autre présentation : soit F une primitive de f sur $]a,b]$.

$\lim\limits_{x\to a^+} \int_x^b f(t)dt$ existe et est réelle si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ existe et est réelle, c'est-à-dire si F est prolongeable par continuité au point a.

- Soit a et b deux réels tels que $a<b$ et f une fonction continue sur $[a,b[$. *On dit que l'intégrale* $I = \int_a^b f(t)dt$ *est convergente (ou existe) si et seulement si* $\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$ *existe et est réelle.* Dans ce cas, on écrira $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$.

Autre présentation : soit F une primitive de f sur $[a,b[$.

$\lim\limits_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et est réelle si et seulement si $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ existe et est réelle, c'est-à-dire si F est prolongeable par continuité au point b.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

- Soit b un réel et f une fonction continue sur $]-\infty, b]$. *On dit que l'intégrale* $I = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ *est convergente (ou existe) si et seulement si* $\lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{b} f(t)dt$ *existe et est réelle.* Dans ce cas, on écrira $\int_{-\infty}^{b} f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{b} f(t)dt.$

Soit F une primitive de f sur $]-\infty, b]$. $\lim_{x \to -\infty} \int_{x}^{b} f(t)dt$ existe et est réelle si et seulement si $\lim_{x \to -\infty} F(x)$ existe et est réelle.

- Soit a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. *On dit que l'intégrale* $I = \int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente (ou existe) si et seulement si* $\lim_{x \to +\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt$ *existe et est réelle.* Dans ce cas, on écrira $\int_{a}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt.$

Soit F une primitive de f sur $[a; +\infty[$. $\lim_{x \to +\infty} \int_{a}^{x} f(t)dt$ existe et est réelle si et seulement si $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ existe et est réelle.

DIVERGENCE : dans les quatre types de cas, l'intégrale sera divergente si et seulement si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si la limite n'existe pas ou est infinie.

INTEGRALES FAUSSEMENT IMPROPRES

Soit I l'un des deux intervalles suivants : $I =]a, b]$, (resp $[a, b[$) avec $a < b$ et a, b réels.

DEFINITION : *Soit f une fonction continue sur l'intervalle I On dit que l'intégrale $\int_{a}^{b} f(t)dt$ est faussement impropre si f est prolongeable par continuité au point a (resp b).*

THEOREME : Une intégrale faussement impropre est convergente.

Conséquence : Lorsque l'on a affaire à une intégrale impropre sur un intervalle de bornes finies, il faut commencer par chercher la limite de f au point où l'intégrale est impropre : si cette limite est réelle, le problème est réglé ; si cette limite n'est pas réelle, l'intégrale est vraiment impropre.

STRUCTURE

L'ensemble, noté $\mathcal{F}$, des fonctions définies continues sur un même intervalle I ($I =]a, b]$, $[a, b[$, $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$) dont l'intégrale généralisée converge est un espace vectoriel réel pour l'addition des applications et la multiplication par un réel. Si nous notons $\int_I f(t)dt$ et $\int_I g(t)dt$ les intégrales de deux fonctions f et g de $\mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient la formule de **linéarité des intégrales convergentes.**

$$\int_I (f + \lambda g)(t)dt = \int_I f(t)dt + \lambda \int_I g(t)dt.$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.