



RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



ANALYSE

INTEGRALES IMPROPRES

INTEGRALES

GENERALISEES

OU IMPROPRES

INTEGRATION DES FONCTIONS

CONTINUES PAR MORCEAUX

FONCTIONS EN ESCALIER

DEFINITION : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et J un ensemble d'indices fini ou égal à \mathbb{N} , $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ une suite strictement croissante de réels (avec la convention que si $I =]-\infty; b]$ ou $]-\infty, b[$, alors $a_0 = -\infty$ et $a_k \in I$ pour $k \geq 1, k \in J$). On dit que f est en escalier sur I pour la subdivision $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ si f est constante sur les intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ pour tout $k \in J$.

Donc $\forall k \in J, \exists \alpha_k \in \mathbb{R} / \forall x \in]a_k, a_{k+1}[, f(x) = \alpha_k$.

Cas particulier : Soit une fonction f , définie sur $I = [a, b]$. On dit que f est en escalier sur I , s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \dots, a_n)$ de I , telle que f soit constante sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$, $0 \leq k \leq n - 1$.

Donc $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \exists \alpha_k \in \mathbb{R} / \forall x \in]a_k, a_{k+1}[, f(x) = \alpha_k$.

FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

Soit deux réels a et b tels que $a < b$ et soit $I = [a; b]$ un segment. Considérons une fonction f définie sur I .

DEFINITION : On dit que f est continue par morceaux sur I , s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que, $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, la restriction f_k de f à l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, soit continue sur cet intervalle et possède des limites finies à droite et à gauche des points a_k pour $1 \leq k \leq n - 1$ et f doit avoir des limites réelles en $a_0 = a$ à droite et en $a_n = b$ à gauche.

Concrètement cela veut dire que f est continue sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ et que la restriction de f à $]a_k, a_{k+1}[$ est prolongeable par continuité aux points a_k et a_{k+1} .

2 Intégrales généralisées

Remarque : On peut généraliser la définition en considérant une subdivision formée d'un ensemble dénombrable de points

$\mathcal{S} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$: les conditions restent les mêmes.

Toute fonction continue sur I est continue par morceaux sur I , quelle que soit la subdivision considérée et une fonction en escalier est continue par morceaux.

Une autre présentation : On dit que f est continue par morceaux sur I , s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$, si $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ il existe une fonction φ_k définie, continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ et telle que la restriction de f à $]a_k, a_{k+1}[$ soit égale à φ_k

DEFINITION : Soit f une fonction continue sur un intervalle I de \mathbb{R} autre qu'un segment. On dit que f est continue par morceaux sur I si et seulement si la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

INTEGRATION

• Soit a et b deux réels $a < b$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b]$, pour une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \dots, a_n)$. Notons f_k la restriction de f à l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, pour $0 \leq k \leq n-1$.

On peut calculer $A(\mathcal{S}) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x) dx$, puisqu'il s'agit d'une somme d'intégrales de fonctions continues sur un segment (en effet f_k est prolongeable par continuité sur $[a_k, a_{k+1}]$)

DEFINITION : Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on note $\int_a^b f(x) dx$ la quantité $A(\mathcal{S})$, pour n'importe quelle subdivision \mathcal{S} , pour laquelle f est continue par morceaux.

Ecriture

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x) dx$$

(cette dernière par abus d'écriture)

L'utilisation de cette notion sera très utile en Probabilités.

PROPRIETES

• Soit f et g continues par morceaux sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

• Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et λ un réel, alors

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

• La relation de Chasles est valable.

• Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ ($a < b$)

$$f \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ ($a < b$), alors $|f|$ est aussi continue par morceaux (pour la même subdivision d'ailleurs) et on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- Soit f et g continues par morceaux sur $[a, b]$ ($a < b$), alors

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$; alors f est bornée sur $[a, b]$. Dans ces conditions, il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que $|f| \leq M$ sur $[a, b]$.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)M.$$

INTEGRALES IMPROPRES

CONVERGENCE, DIVERGENCE

CONVERGENCE

DEFINITIONS :

- Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $]a, b[$. On dit que l'intégrale $I = \int_a^b f(t) dt$ est convergente (ou existe) si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$ existe et est réelle. Dans ce cas, on écrira $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$.

Autre présentation : soit F une primitive de f sur $]a, b[$.

$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$ existe et est réelle si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$ existe et est réelle, c'est-à-dire si F est prolongeable par continuité au point a .

- Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale $I = \int_a^b f(t) dt$ est convergente (ou existe) si et seulement si $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ existe et est réelle. Dans ce cas, on écrira $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$.

Autre présentation : soit F une primitive de f sur $[a, b[$.

$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ existe et est réelle si et seulement si $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ existe et est réelle, c'est-à-dire si F est prolongeable par continuité au point b .

page 3

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

4 Intégrales généralisées

• Soit b un réel et f une fonction continue sur $]-\infty, b]$. On dit que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^b f(t)dt$ est convergente (ou existe) si et seulement si $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt$ existe et est réelle. Dans ce cas, on écrira $\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt$.

Soit F une primitive de f sur $]-\infty, b]$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt$ existe et est réelle si et seulement si $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ existe et est réelle.

• Soit a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $I = \int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente (ou existe) si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est réelle. Dans ce cas, on écrira $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$.

Soit F une primitive de f sur $[a, +\infty[$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est réelle si et seulement si $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ existe et est réelle.

DIVERGENCE : dans les quatre types de cas, l'intégrale sera divergente si et seulement si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si la limite n'existe pas ou est infinie.

INTEGRALES FAUSSEMENT IMPROPRES

Soit I l'un des deux intervalles suivants : $I =]a, b]$, (resp $[a, b[$) avec $a < b$ et a, b réels.

DEFINITION : Soit f une fonction continue sur l'intervalle I . On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est faussement impropre si f est prolongeable par continuité au point a (resp b).

THEOREME : Une intégrale faussement impropre est convergente.

Conséquence : Lorsque l'on a affaire à une intégrale impropre sur un intervalle de bornes finies, il faut commencer par chercher la limite de f au point où l'intégrale est impropre : si cette limite est réelle, le problème est réglé ; si cette limite n'est pas réelle, l'intégrale est vraiment impropre.

STRUCTURE

L'ensemble, noté \mathcal{F} , des fonctions définies continues sur un même intervalle I ($I =]a, b]$, $[a, b[$, $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[$) dont l'intégrale généralisée converge est un espace vectoriel réel pour l'addition des applications et la multiplication par un réel. Si nous notons $\int_I f(t)dt$ et $\int_I g(t)dt$ les intégrales de deux fonctions f et g de \mathcal{F} et $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient la formule de **linéarité des intégrales convergentes**.

$$\int_I (f + \lambda g)(t)dt = \int_I f(t)dt + \lambda \int_I g(t)dt.$$