RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

INTEGRALES IMPROPRES

INTEGRALES GENERALISEES OU IMPROPRES

INTEGRATION DES FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

FONCTIONS EN ESCALIER

DEFINITION : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et J un ensemble d'indices fini ou égal à $\mathbb{N}$, $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ une suite strictement croissante de réels (avec la convention que si $I =]-\infty; b]$ ou $]-\infty, b[$, alors $a_0 = -\infty$ et $a_k \in I$ pour $k \geq 1, k \in J$). On dit que f est en escalier sur I pour la subdivision $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ si f est constante sur les intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ pour tout $k \in J$.*

Donc $\forall k \in J,\ \exists \alpha_k \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in]a_k, a_{k+1}[, f(x) = \alpha_k$.

Cas particulier : *Soit une fonction f, définie sur $I = [a, b]$. On dit que f est en escalier sur I, s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \ldots, a_n)$ de I, telle que f soit constante sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[,\ 0 \leq k \leq n-1$.*

Donc $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \exists \alpha_k \in \mathbb{R}\ /\ \forall x \in]a_k, a_{k+1}[, f(x) = \alpha_k$.

FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX

Soit deux réels a et b tels que $a < b$ et soit $I = [a; b]$ un segement. Considérons une fonction f définie sur I.

DEFINITION : *On dit que f est continue par morceaux sur I, s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \ldots a_n)$ de $[a, b]$ telle que, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, la restriction f_k de f à l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, soit continue sur cet intervalle et possède des limites finies à droite et à gauche des points a_k pour $1 \leq k \leq n-1$ et f doit avoir des limites réelles en $a_0 = a$ à droite et en $a_n = b$ à gauche.*

Concrètement cela veut dire que f est continue sur chacun des intervalles $]a_k, a_{k+1}[$ et que la restriction de f à $]a_k, a_{k+1}[$ est prolongeable par continuité aux points a_k et a_{k+1}.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

Remarque : On peut généraliser la définition en considérant une subdivision formée d'un ensemble dénombrable de points

$\mathcal{S} = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$: les conditions restant les mêmes.

Toute fonction continue sur I est continue par morceaux sur I, quelle que soit la subdivision considérée et une fonction en escalier est continue par morceaux.

Une autre présentation : *On dit que f est continue par morceaux sur I, s'il existe une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \ldots a_n)$ de $[a, b]$, si $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ il existe une fonction φ_k définie, continue sur $[a_k, a_{k+1}]$ et telle que la restriction de f à $]a_k, a_{k+1}[$ soit égale à φ_k*

DEFINITION : *Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ autre qu'un segment. On dit que f est continue par morceaux sur I si et seulement si la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.*

INTEGRATION

- Soit a et b deux réels $a < b$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $I = [a, b]$, pour une subdivision $\mathcal{S} = (a_0, \ldots, a_n)$. Notons f_k la restriction de f à à l'intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, pour $0 \leq k \leq n-1$.

On peut calculer $A(S) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x)dx$, puisqu'il s'agit d'une somme d'intégrales de fonctions continues sur un segment (en effet f_k est prolongeable par continuité sur $[a_k, a_{k+1}]$)

DEFINITION : *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on note $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ la quantité $A(S)$, pour n'importe quelle subdivision $\mathcal{S}$, pour laquelle f est continue par morceaux.*

Ecriture

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x)dx$$

(cette dernière par abus d'écriture)

L'utilisation de cette notion sera très utile en Probabilités.

PROPRIETES

- Soit f et g continues par morceaux sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ et λ un réel, alors

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

- La relation de Chasles est valable.
- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ $(a < b)$

$$f \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ $(a < b)$, alors $|f|$ est aussi continue par morceaux (pour la même subdivision d'ailleurs) et on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

- Soit f et g continues par morceaux sur $[a, b]$ $(a < b)$, alors

$$f \leq g \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$; alors f est bornée sur $[a, b]$. Dans ces conditions, il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que $|f| \leq M$ sur $[a, b]$.

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)M.$$

INTEGRALES IMPROPRES

CONVERGENCE, DIVERGENCE

CONVERGENCE

DEFINITIONS :

- Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $]a, b]$. *On dit que l'intégrale* $I = \int_a^b f(t)dt$ *est convergente (ou existe) si et seulement si* $\lim\limits_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$ *existe et est réelle.* Dans ce cas, on écrira $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$.

Autre présentation : soit F une primitive de f sur $]a, b]$.

$\lim\limits_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt$ existe et est réelle si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^+} F(x)$ existe et est réelle, c'est-à-dire si F est prolongeable par continuité au point a.

- Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b[$. *On dit que l'intégrale* $I = \int_a^b f(t)dt$ *est convergente (ou existe) si et seulement si* $\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$ *existe et est réelle.* Dans ce cas, on écrira $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$.

Autre présentation : soit F une primitive de f sur $[a, b[$.

$\lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et est réelle si et seulement si $\lim\limits_{x \to b^-} F(x)$ existe et est réelle, c'est-à-dire si F est prolongeable par continuité au point b.

- Soit b un réel et f une fonction continue sur $]-\infty, b]$. *On dit que l'intégrale* $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$ *est convergente (ou existe) si et seulement si* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{b} f(t)dt$ *existe et est réelle.* Dans ce cas, on écrira $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)dt = \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{b} f(t)dt$.

Soit F une primitive de f sur $]-\infty, b]$. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{b} f(t)dt$ existe et est réelle si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$ existe et est réelle.

- Soit a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. *On dit que l'intégrale* $I = \displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente (ou existe) si et seulement si* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{a}^{x} f(t)dt$ *existe et est réelle.* Dans ce cas, on écrira $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty}\int_{a}^{x} f(t)dt$.

Soit F une primitive de f sur $[a; +\infty[$. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{a}^{x} f(t)dt$ existe et est réelle si et seulement si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ existe et est réelle.

DIVERGENCE : dans les quatre types de cas, l'intégrale sera divergente si et seulement si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si la limite n'existe pas ou est infinie.

INTEGRALES FAUSSEMENT IMPROPRES

Soit I l'un des deux intervalles suivants : $I =]a, b]$, (resp $[a, b[$) avec $a < b$ et a, b réels.

DEFINITION : *Soit f une fonction continue sur l'intervalle I On dit que l'intégrale* $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)dt$ *est faussement impropre si f est prolongeable par continuité au point a (resp b).*

> **THEOREME : Une intégrale faussement impropre est convergente.**

Conséquence : Lorsque l'on a affaire à une intégrale impropre sur un intervalle de bornes finies, il faut commencer par chercher la limite de f au point où l'intégrale est impropre : si cette limite est réelle, le problème est réglé ; si cette limite n'est pas réelle, l'intégrale est vraiment impropre.

STRUCTURE

L'ensemble, noté $\mathcal{F}$, des fonctions définies continues sur un même intervalle I $\big(I =]a, b]$, $[a, b[$, $]-\infty, b]$ ou $[a, +\infty[\big)$ dont l'intégrale généralisée converge est un espace vectoriel réel pour l'addition des applications et la multiplication par un réel. Si nous notons $\displaystyle\int_I f(t)dt$ et $\displaystyle\int_I g(t)dt$ les intégrales de deux fonctions f et g de $\mathcal{F}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on obtient la formule de **linéarité des intégrales convergentes.**

$$\int_I (f + \lambda g)(t)dt = \int_I f(t)dt + \lambda \int_I g(t)dt.$$