



## RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



## ANALYSE

## INTEGRALES IMPROPRES

## INTEGRALES

## GENERALISEES

## OU IMPROPRES

## INTEGRATION DES FONCTIONS

## CONTINUES PAR MORCEAUX

**FONCTIONS EN ESCALIER**

**DEFINITION** : Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $J$  un ensemble d'indices fini ou égal à  $\mathbb{N}$ ,  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  une suite strictement croissante de réels (avec la convention que si  $I = ]-\infty; b]$  ou  $] -\infty, b[$ , alors  $a_0 = -\infty$  et  $a_k \in I$  pour  $k \geq 1, k \in J$ ). On dit que  $f$  est en escalier sur  $I$  pour la subdivision  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  si  $f$  est constante sur les intervalles  $]a_k, a_{k+1}[$  pour tout  $k \in J$ .

Donc  $\forall k \in J, \exists \alpha_k \in \mathbb{R} / \forall x \in ]a_k, a_{k+1}[, f(x) = \alpha_k$ .

**Cas particulier** : Soit une fonction  $f$ , définie sur  $I = [a, b]$ . On dit que  $f$  est en escalier sur  $I$ , s'il existe une subdivision  $\mathcal{S} = (a_0, \dots, a_n)$  de  $I$ , telle que  $f$  soit constante sur chacun des intervalles  $]a_k, a_{k+1}[$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$ .

Donc  $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, \exists \alpha_k \in \mathbb{R} / \forall x \in ]a_k, a_{k+1}[, f(x) = \alpha_k$ .

**FONCTIONS CONTINUES PAR MORCEAUX**

Soit deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $a < b$  et soit  $I = [a; b]$  un segment. Considérons une fonction  $f$  définie sur  $I$ .

**DEFINITION** : On dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $I$ , s'il existe une subdivision  $\mathcal{S} = (a_0, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$  telle que,  $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ , la restriction  $f_k$  de  $f$  à l'intervalle  $]a_k, a_{k+1}[$ , soit continue sur cet intervalle et possède des limites finies à droite et à gauche des points  $a_k$  pour  $1 \leq k \leq n - 1$  et  $f$  doit avoir des limites réelles en  $a_0 = a$  à droite et en  $a_n = b$  à gauche.

Concrètement cela veut dire que  $f$  est continue sur chacun des intervalles  $]a_k, a_{k+1}[$  et que la restriction de  $f$  à  $]a_k, a_{k+1}[$  est prolongeable par continuité aux points  $a_k$  et  $a_{k+1}$ .

## 2 Intégrales généralisées

**Remarque** : On peut généraliser la définition en considérant une subdivision formée d'un ensemble dénombrable de points

$\mathcal{S} = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  : les conditions restent les mêmes.

Toute fonction continue sur  $I$  est continue par morceaux sur  $I$ , quelle que soit la subdivision considérée et une fonction en escalier est continue par morceaux.

Une autre présentation : On dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $I$ , s'il existe une subdivision  $\mathcal{S} = (a_0, \dots, a_n)$  de  $[a, b]$ , si  $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  il existe une fonction  $\varphi_k$  définie, continue sur  $[a_k, a_{k+1}]$  et telle que la restriction de  $f$  à  $]a_k, a_{k+1}[$  soit égale à  $\varphi_k$

**DEFINITION** : Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  autre qu'un segment. On dit que  $f$  est continue par morceaux sur  $I$  si et seulement si la restriction de  $f$  à tout segment inclus dans  $I$  est continue par morceaux.

### INTEGRATION

• Soit  $a$  et  $b$  deux réels  $a < b$  et soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $I = [a, b]$ , pour une subdivision  $\mathcal{S} = (a_0, \dots, a_n)$ . Notons  $f_k$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $]a_k, a_{k+1}[$ , pour  $0 \leq k \leq n-1$ .

On peut calculer  $A(\mathcal{S}) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x) dx$ , puisqu'il s'agit d'une somme d'intégrales de fonctions continues sur un segment (en effet  $f_k$  est prolongeable par continuité sur  $[a_k, a_{k+1}]$ )

**DEFINITION** : Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$ . On appelle intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$  et on note  $\int_a^b f(x) dx$  la quantité  $A(\mathcal{S})$ , pour n'importe quelle subdivision  $\mathcal{S}$ , pour laquelle  $f$  est continue par morceaux.

### **Ecriture**

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x) dx$$

(cette dernière par abus d'écriture)

L'utilisation de cette notion sera très utile en Probabilités.

### PROPRIETES

• Soit  $f$  et  $g$  continues par morceaux sur  $[a, b]$ , alors

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

• Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  et  $\lambda$  un réel, alors

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

• La relation de Chasles est valable.

• Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  ( $a < b$ )

$$f \geq 0 \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

- Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ), alors  $|f|$  est aussi continue par morceaux (pour la même subdivision d'ailleurs) et on a

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- Soit  $f$  et  $g$  continues par morceaux sur  $[a, b]$  ( $a < b$ ), alors

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

- Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $[a, b]$ ; alors  $f$  est bornée sur  $[a, b]$ . Dans ces conditions, il existe  $M \in \mathbb{R}$ , tel que  $|f| \leq M$  sur  $[a, b]$ .

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)M.$$

## INTEGRALES IMPROPRES

### CONVERGENCE, DIVERGENCE

#### CONVERGENCE

##### **DEFINITIONS :**

- Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur  $]a, b[$ . On dit que l'intégrale  $I = \int_a^b f(t) dt$  est convergente (ou existe) si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$  existe et est réelle. Dans ce cas, on écrira  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$ .

**Autre présentation :** soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $]a, b[$ .

$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$  existe et est réelle si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$  existe et est réelle, c'est-à-dire si  $F$  est prolongeable par continuité au point  $a$ .

- Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$  et  $f$  une fonction continue sur  $[a, b[$ . On dit que l'intégrale  $I = \int_a^b f(t) dt$  est convergente (ou existe) si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$  existe et est réelle. Dans ce cas, on écrira  $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$ .

**Autre présentation :** soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, b[$ .

$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$  existe et est réelle si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$  existe et est réelle, c'est-à-dire si  $F$  est prolongeable par continuité au point  $b$ .

page 3

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

#### 4 Intégrales généralisées

• Soit  $b$  un réel et  $f$  une fonction continue sur  $]-\infty, b]$ . On dit que l'intégrale  $I = \int_{-\infty}^b f(t)dt$  est convergente (ou existe) si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt$  existe et est réelle. Dans ce cas, on écrira  $\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt$ .

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $]-\infty, b]$ .  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^b f(t)dt$  existe et est réelle si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$  existe et est réelle.

• Soit  $a$  un réel et  $f$  une fonction continue sur  $[a, +\infty[$ . On dit que l'intégrale  $I = \int_a^{+\infty} f(t)dt$  est convergente (ou existe) si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$  existe et est réelle. Dans ce cas, on écrira  $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ .

Soit  $F$  une primitive de  $f$  sur  $[a, +\infty[$ .  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$  existe et est réelle si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  existe et est réelle.

**DIVERGENCE** : dans les quatre types de cas, l'intégrale sera divergente si et seulement si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire si la limite n'existe pas ou est infinie.

#### INTEGRALES FAUSSEMENT IMPROPRES

Soit  $I$  l'un des deux intervalles suivants :  $I = ]a, b]$ , ( resp  $[a, b[$ ) avec  $a < b$  et  $a, b$  réels.

**DEFINITION** : Soit  $f$  une fonction continue sur l'intervalle  $I$ . On dit que l'intégrale  $\int_a^b f(t)dt$  est faussement impropre si  $f$  est prolongeable par continuité au point  $a$  (resp  $b$ ).

**THEOREME** : Une intégrale faussement impropre est convergente.

**Conséquence** : Lorsque l'on a affaire à une intégrale impropre sur un intervalle de bornes finies, il faut commencer par chercher la limite de  $f$  au point où l'intégrale est impropre : si cette limite est réelle, le problème est réglé ; si cette limite n'est pas réelle, l'intégrale est vraiment impropre.

#### STRUCTURE

L'ensemble, noté  $\mathcal{F}$ , des fonctions définies continues sur un même intervalle  $I$  ( $I = ]a, b]$ ,  $[a, b[$ ,  $]-\infty, b]$  ou  $[a, +\infty[$ ) dont l'intégrale généralisée converge est un espace vectoriel réel pour l'addition des applications et la multiplication par un réel. Si nous notons  $\int_I f(t)dt$  et  $\int_I g(t)dt$  les intégrales de deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{F}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on obtient la formule de **linéarité des intégrales convergentes**.

$$\int_I (f + \lambda g)(t)dt = \int_I f(t)dt + \lambda \int_I g(t)dt.$$