



## RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



ANALYSE

DEVELOPPEMENTS LIMITES

DEVELOPPEMENTS

LIMITES

FORMULE DE TAYLOR

A L'ORDRE  $n$ 

AVEC RESTE INTEGRAL

FORMULE DE TAYLOR

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sur un intervalle  $I$  non vide de  $\mathbb{R}$  et non réduite à un point et  $a, b$  deux éléments de  $I$ .

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

FORMULE DE MACLAURIN

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sur un intervalle  $I$  contenant 0 et non réduit à  $\{0\}$ .

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

## 2 Développements limités

### L'INEGALITE DE TAYLOR-LAGRANGE

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sur  $[a, b]$  ( $a \leq b$ ).

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ où } M \text{ est un}$$

majorant de  $|f^{(n+1)}(t)|$  sur  $[a, b]$ .

*Remarque :*

- On peut appliquer l'inégalité précédente sur  $[a, x]$ , où  $x \in [a, b]$ , en gardant la même signification pour  $M$ .
- Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de classe  $C^{n+1}$  sur  $I$  ; on suppose que  $|f^{(n+1)}|$  est bornée sur  $I$  par un réel  $A$ . Alors, pour tout  $a$  et tout  $b$  dans  $I$ , on peut écrire :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq A \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

### THEOREME DE TAYLOR-YOUNG

**THEOREME :** soit  $I$  un intervalle non vide et non réduit à un point de  $\mathbb{R}$ ,  $a$  et  $b$  deux éléments de  $I$ ,  $f$  une fonction de classe  $C^n$  sur  $I$ . Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((b-a)^n)$$

### FORMULE DE MACLAURIN-YOUNG

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant 0 et non réduit à  $\{0\}$ ,  $f$  une fonction de classe  $C^n$  sur  $I$ . Alors

$$\forall x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n)$$

## DEVELOPPEMENTS LIMITES

### DEVELOPPEMENT LIMITE EN $x_0$

**DEFINITION :** Soit  $I$  un intervalle contenant  $x_0$ , non réduit à  $x_0$ , et  $f$  une fonction définie sur  $I$  sauf éventuellement en  $x_0$ . Notons  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$  ( $D_f$  page 2)

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE © EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

est soit  $I$  soit  $I - \{x_0\}$ ). Considérons un entier naturel  $n$ . On dit que  $f$  admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre  $n$  si et seulement s'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie sur  $I$ , un polynôme  $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$  tels que :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } \forall x \in D_f, f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x).$$

On a :  $(x - x_0)^n \varepsilon(x) = o((x - x_0)^n)$ . Le polynôme  $x \mapsto P_n(x - x_0)$  est la partie principale du développement limité,  $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$  est la partie complémentaire ou le reste.

**Autre écriture :**  $f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ .

### PROPRIETES

• Une fonction  $f$  définie en un point  $x_0$  admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre 0 si et seulement si elle est continue en  $x_0$ .

Une fonction  $f$  non définie en un point  $x_0$  admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre 0 si et seulement si elle est prolongeable par continuité en  $x_0$ .

• Une fonction  $f$ , continue en  $x_0$ , admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable en  $x_0$ .

• Soit une fonction  $f$  est continue en  $x_0$ . Alors  $f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement elle admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre 1.  $f'(x_0)$  est le coefficient de  $(x - x_0)$  dans le développement : la tangente à la courbe de  $f$  au point  $(x_0, f(x_0))$  a pour équation  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  : c'est la partie polynomiale du développement.

### TRONCATURE

Si une fonction  $f$  admet en  $x_0$  un développement limité à l'ordre  $n$ ,  $n > 0$ , alors elle admet en  $x_0$  un développement limité à tout ordre  $k$ ,  $k < n$ . La partie principale du développement limité à l'ordre  $k$  s'obtient à partir de la partie principale du développement à l'ordre  $n$  en prenant les termes dont le degré est  $\leq k$ .

### UNICITE

Si une fonction admet en un point un développement limité à un ordre donné  $n$ , ce développement est unique, en ce sens que la partie principale est unique ainsi que la partie complémentaire

### DEVELOPPEMENT LIMITE ET EQUIVALENT

Soit une fonction  $f$  admettant en un point  $x_0$  un développement limité à un ordre  $n$ . Si la partie polynomiale  $P_n$  n'est pas le polynôme nul, alors  $f(x) \underset{x_0}{\sim} P_n(x)$ .

**CONSTRUCTION DE DEVELOPPEMENTS  
LIMITES**

**THEOREME :** Toute fonction de classe  $C^{n+1}$  sur un intervalle  $[a, b]$ , admet en tout point  $x_0$  de l'intervalle  $]a, b[$  un développement limité à l'ordre  $n$  donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x-x_0)^n) \quad \text{ou}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

D'après le théorème de Taylor-Young, il suffit que  $f$  soit de classe  $C^n$  sur  $I$

*Remarque :* Si  $x_0 = 0$ , on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

**DEVELOPPEMENTS CLASSIQUES EN 0**

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$\forall x \in ]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + x^n \varepsilon(x) \end{aligned} \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$\forall x \in ]-\infty, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &= - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + x^n \varepsilon(x) \end{aligned} \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0.$$

*Remarque :* On obtient cette dernière égalité à partir de la précédente en changeant  $x$  en  $-x$ .

page 4

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.