DEVELOPPEMENTS LIMITES

FORMULE DE TAYLOR A L'ORDRE n AVEC RESTE INTEGRAL

FORMULE DE TAYLOR

Soit f une fonction de classe C^{n+1} $(n \in \mathbb{N})$ sur un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$ et non réduite à un point et a, b deux éléments de I.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

FORMULE DE MACLAURIN

Soit f une fonction de classe C^{n+1} $(n \in \mathbb{N})$ sur un intervalle I contenant 0 et non réduit à $\{0\}$.

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

L'INEGALITE DE TAYLOR-LAGRANGE

Soit f une fonction de classe C^{n+1} $(n \in \mathbb{N})$ sur $[a,b]$ $(a \leq b)$. $\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, **où M est un majorant de $|f^{(n+1)}(t)|$ sur $[a,b]$.**

Remarque :

- On peut appliquer l'inégalité précédente sur $[a,x]$, où $x \in [a,b]$, en gardant la même signification pour M.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I ; on suppose que $|f^{(n+1)}|$ est bornée sur I par un réel A. Alors, pour tout a et tout b dans I, on peut écrire :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq A \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

THEOREME DE TAYLOR-YOUNG

THEOREME : soit I un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I, f une fonction de classe C^n sur I. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((b-a)^n)$$

FORMULE DE MACLAURIN-YOUNG

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et non réduit à $\{0\}$, f une fonction de classe C^n sur I. Alors

$$\forall x \in I, \; f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n)$$

DEVELOPPEMENTS LIMITES

DEVELOPPEMENT LIMITE EN x_0

DEFINITION : *Soit I un intervalle contenant x_0, non réduit à x_0, et f une fonction définie sur I sauf éventuellement en x_0. Notons D_f l'ensemble de définition de f (D_f*

est soit I soit $I - \{x_0\}$). Considérons un entier naturel n. On dit que f admet en x_0 un développement limité à l'ordre n si et seulement s'il existe une fonction ε définie sur I, un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } \forall x \in D_f,\ f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x).$$

On a : $(x - x_0)^n \varepsilon(x) = o((x - x_0)^n)$. Le polynôme $x \longmapsto P_n(x - x_0)$ est la partie principale du développement limité, $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est la partie complémentaire ou le reste.

Autre écriture : $f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$.

PROPRIETES

- **Une fonction f définie en un point x_0 admet en x_0 un développement limité à l'ordre 0 si et seulement si elle est continue en x_0.**

Une fonction f non définie en un point x_0 admet en x_0 un développe- ment limité à l'ordre 0 si et seulement si elle est prolongeable par continuité en x_0.

- **Une fonction f, continue en x_0, admet en x_0 un développe-ment limité à l'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable en x_0.**

- Soit une fonction f est continue en x_0. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement elle admet en x_0 un développement limité à l'ordre 1. $f'(x_0)$ est le coefficient de $(x - x_0)$ dans le développement : la tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0))(x - x_0)$: c'est la partie polynomiale du développement.

TRONCATURE

Si une fonction f admet en x_0 un développement limité à l'ordre n, $n > 0$, alors elle admet en x_0 un développement limité à tout ordre k, $k < n$. La partie principale du développement limité à l'ordre k s'obtient à partir de la partie principale du développement à l'ordre n en prenant les termes dont le degré est $\leq k$.

UNICITE

Si une fonction admet en un point un développement limité à un ordre donné n, ce développement est unique, en ce sens que la partie principale est unique ainsi que la partie complémentaire

DEVELOPPEMENT LIMITE ET EQUIVALENT

Soit une fonction f admettant en un point x_0 un développement limité à un ordre n. Si la partie polynomiale P_n n'est pas le polynôme nul, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} P_n(x)$.

CONSTRUCTION DE DEVELOPPEMENTS LIMITES

THEOREME : Toute fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle $[a,b]$, admet en tout point x_0 de l'intervalle $]a,b[$ un développement limité à l'ordre n donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o((x-x_0)^n) \qquad \textbf{ou}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x), \ \textbf{avec} \ \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

D'après le théorème de Taylor-Young, il suffit que f soit de classe C^n sur I

Remarque : Si $x_0 = 0$, on obtient

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

DEVELOPPEMENTS CLASSIQUES EN 0

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$\forall x \in \,]-1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + x^n \varepsilon(x) \end{aligned} \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

$\forall x \in \,]-\infty, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned} \ln(1-x) &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + x^n \varepsilon(x) \end{aligned} \quad \text{avec } \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Remarque : On obtient cette dernière égalité à partir de la précédente en changeant x en $-x$.