RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

DEVELOPPEMENTS LIMITES

DEVELOPPEMENTS LIMITES

FORMULE DE TAYLOR A L'ORDRE n AVEC RESTE INTEGRAL

FORMULE DE TAYLOR

Soit f une fonction de classe C^{n+1} $(n \in \mathbb{N})$ sur un intervalle I non vide de $\mathbb{R}$ et non réduite à un point et a, b deux éléments de I.

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

FORMULE DE MACLAURIN

Soit f une fonction de classe C^{n+1} $(n \in \mathbb{N})$ sur un intervalle I contenant 0 et non réduit à $\{0\}$.

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE
© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

L'INEGALITE DE TAYLOR-LAGRANGE

Soit f une fonction de classe C^{n+1} $(n \in \mathbb{N})$ sur $[a,b]$ $(a \leq b)$.

$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, **où M est un majorant de $|f^{(n+1)}(t)|$ sur $[a,b]$.**

Remarque :

- On peut appliquer l'inégalité précédente sur $[a,x]$, où $x \in [a,b]$, en gardant la même signification pour M.
- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^{n+1} sur I ; on suppose que $|f^{(n+1)}|$ est bornée sur I par un réel A. Alors, pour tout a et tout b dans I, on peut écrire :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq A \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

THEOREME DE TAYLOR-YOUNG

THEOREME : soit I un intervalle non vide et non réduit à un point de $\mathbb{R}$, a et b deux éléments de I, f une fonction de classe C^n sur I. Alors

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((b-a)^n)$$

FORMULE DE MACLAURIN-YOUNG

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et non réduit à $\{0\}$, f une fonction de classe C^n sur I. Alors

$$\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o(x^n)$$

DEVELOPPEMENTS LIMITES

DEVELOPPEMENT LIMITE EN x_0

DEFINITION : *Soit I un intervalle contenant x_0, non réduit à x_0, et f une fonction définie sur I sauf éventuellement en x_0. Notons D_f l'ensemble de définition de f (D_f*

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

est soit I soit $I - \{x_0\}$). Considérons un entier naturel n. On dit que f admet en x_0 un développement limité à l'ordre n si et seulement s'il existe une fonction ε définie sur I, un polynôme $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que :

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0 \text{ et } \forall x \in D_f,\ f(x) = P_n(x - x_0) + (x - x_0)^n \varepsilon(x).$$

On a : $(x - x_0)^n \varepsilon(x) = o((x - x_0)^n)$. Le polynôme $x \longmapsto P_n(x - x_0)$ est la partie principale du développement limité, $(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est la partie complémentaire ou le reste.

Autre écriture : $f(x) = P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$.

PROPRIETES

- **Une fonction f définie en un point x_0 admet en x_0 un développement limité à l'ordre 0 si et seulement si elle est continue en x_0.**

Une fonction f non définie en un point x_0 admet en x_0 un développe- ment limité à l'ordre 0 si et seulement si elle est prolongeable par continuité en x_0.

- **Une fonction f, continue en x_0, admet en x_0 un développe-ment limité à l'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable en x_0.**

- Soit une fonction f est continue en x_0. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement elle admet en x_0 un développement limité à l'ordre 1. $f'(x_0)$ est le coefficient de $(x - x_0)$ dans le développement : la tangente à la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0))(x - x_0)$: c'est la partie polynomiale du développement.

TRONCATURE

Si une fonction f admet en x_0 un développement limité à l'ordre $n,\ n > 0$, alors elle admet en x_0 un développement limité à tout ordre $k,\ k < n$. La partie principale du développement limité à l'ordre k s'obtient à partir de la partie principale du développement à l'ordre n en prenant les termes dont le degré est $\leq k$.

UNICITE

Si une fonction admet en un point un développement limité à un ordre donné n, ce développement est unique, en ce sens que la partie principale est unique ainsi que la partie complémentaire

DEVELOPPEMENT LIMITE ET EQUIVALENT

Soit une fonction f admettant en un point x_0 un développement limité à un ordre n. Si la partie polynomiale P_n n'est pas le polynôme nul, alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} P_n(x)$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.

CONSTRUCTION DE DEVELOPPEMENTS LIMITES

THEOREME : Toute fonction de classe C^{n+1} sur un intervalle $[a,b]$, admet en tout point x_0 de l'intervalle $]a,b[$ un développement limité à l'ordre n donné par :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+o((x-x_0)^n) \qquad \textbf{ou}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}f^{(k)}(x_0)+(x-x_0)^n\varepsilon(x),\ \textbf{avec}\ \lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$$

D'après le théorème de Taylor-Young, il suffit que f soit de classe C^n sur I

Remarque : Si $x_0=0$, on obtient

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+x^n\varepsilon(x)\ \text{avec}\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

DEVELOPPEMENTS CLASSIQUES EN 0

$\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+x^n\varepsilon(x)\ \text{avec}\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

$\forall x\in\,]-1,+\infty[,\forall n\in\mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+o(x^n)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+x^n\varepsilon(x)\end{aligned}\quad\text{avec}\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

$\forall x\in\,]-\infty,1[,\forall n\in\mathbb{N}^*,$

$$\begin{aligned}\ln(1-x) &=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)\\ &=-\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+x^n\varepsilon(x)\end{aligned}\quad\text{avec}\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$

Remarque : On obtient cette dernière égalité à partir de la précédente en changeant x en $-x$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 10 pages.