RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

SUITES NUMERIQUES

SUITES NUMERIQUES

DEFINITION : *Une suite numérique est une application d'un intervalle de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Si l'intervalle est du type $[\![n_0, n_1]\!]$, la suite est finie ; si l'intervalle est du type $[\![n_0, +\infty[\![$, la suite est infinie et c'est de ce genre de suite dont nous allons parler.*

QUALIFICATIONS

DEFINITION : *Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante (resp strictement croissante) si :*

$\forall n \geq n_0 \qquad u_n \leq u_{n+1}$ (resp $u_n < u_{n+1}$) ou encore

$\forall n \geq n_0 \qquad u_{n+1} - u_n \geq 0$ (resp $u_{n+1} - u_n > 0$).

Remarque : si la suite (u_n) est à termes **strictement positifs**,

$u_{n+1} - u_n \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1.$

Pour les suites définies par $u_n = f(n)$, l'étude de la variation de la suite (u_n) peut se faire en étudiant la variation de la fonction f.

DEFINITION : *Une suite (u_n) est décroissante (resp strictement décroissante) si :* $\forall n \geq n_0 \quad , \quad u_n \geq u_{n+1}$ (resp $u_n > u_{n+1}$).

Remarque : Si la suite (u_n) est à termes **strictement positifs**,

$u_{n+1} - u_n \geq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1.$

DEFINITION : *On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est monotone si elle est croissante ou décroissante.*

Définition analogue pour strictement monotone.

SUITES PARTICULIERES

- *Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est constante s'il existe un réel a tel que :* $\forall n \geq n_0 \quad , \quad u_n = a$.
- *Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est stationnaire s'il existe un rang $n_1 \geq n_0$ à partir duquel (u_n) est constante.*
- *Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est périodique s'il existe un entier $p > 0$ tel que $\forall n \geq n_0 \quad , \quad u_{n+p} = u_n$.*

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

p s'appelle une « période de la suite ». Si c'est le plus petit entier strictement positif satisfaisant à la définition, il s'appelle la période.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ est périodique et de période 2 car $(-1)^{n+2} = (-1)^n$ et $(-1)^{n+1} \neq (-1)^n$.

LIMITE D'UNE SUITE REELLE

DEFINITIONS : *Soit ℓ un nombre réel. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \geq n_0}$ admet ℓ pour limite si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \geq n_0 / \ \forall n \geq N \ , \ |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Cela veut dire aussi que $\ell - \varepsilon \leq u_n \leq \ell + \varepsilon$ ou $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

Ecritures permises : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou $u_n \underset{n \to \infty}{\to} \ell$.

- *On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, quand n tend vers $+\infty$ si*

$$\forall A \in \mathbb{R} \ , \ \exists N \geq n_0 / \ \forall n \geq N \ , \ u_n \geq A.$$

Ceci traduit le fait que u_n devient de plus en plus grand quand $n \to +\infty$ puisqu'il « finit » par dépasser n'importe quel nombre A fixé à l'avance.

- *On dit qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$, quand n tend vers $+\infty$ si*

$$\forall B \in \mathbb{R} \ , \ \exists N \geq n_0 / \ \forall n \geq N \ , \ u_n \leq B.$$

Ceci traduit le fait que u_n devient de plus en plus petit (au sens algébrique du terme) quand $n \to +\infty$ puisqu'il « finit » par être plus petit que n'importe quel nombre B fixé à l'avance.

Une suite qui a pour limite $-\infty$ est une suite à valeurs négatives (au moins à partir d'un certain rang), dont la valeur absolue a pour limite $+\infty$.

SUITES CONVERGENTES DIVERGENTES

DEFINITION : *On dit qu'une suite est convergente s'il existe un réel ℓ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.*

On dira aussi que (u_n) converge vers ℓ.

DEFINITION : *Une suite (u_n) est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente.*

- **Une suite est divergente si elle n'a pas de limite réelle c'est-à-dire si elle a une limite infinie ou si elle n'a pas de limite du tout.**

UNICITE DE LA LIMITE

THEOREME Si une suite admet une limite (réelle ou infinie), cette limite est unique.

OPERATIONS SUR LES LIMITES

Ce sont les mêmes que pour les fonctions réelles : il suffit de se reporter aux tableaux opérations sur les limites pages 12, 13 et 14 et de remplacer f et g par (u_n) et (v_n)

SUITES EQUIVALENTES

DEFINITION : *Une suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est équivalente à une suite* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *s'il existe une suite* $(r_n)_{n\geq n_1}$ $(n_1 \geq n_0)$ *telle que :* $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 1$ *et* $\forall n \geq n_1,\ u_n = v_n \times r_n$.

Cela revient à $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$ lorsque v_n est non nul pour $n \geq n_1$.

Ecriture : On écrira $(u_n) \underset{(+\infty)}{\sim} (v_n)$ ou $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} v_n$ ou $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Dans la pratique, les suites (u_n) et (v_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang N, donc $u_n \underset{(+\infty)}{\sim} v_n \Longleftrightarrow v_n \underset{(+\infty)}{\sim} u_n$. On dira (u_n) et (v_n) sont équivalentes.

PROPRIETES

- $(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n) \Longrightarrow (u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n.)$
- Soient (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes.

$((u_n)$ a une limite (réelle ou infinie) $)\Longrightarrow ((v_n)$ a une limite et c'est la même que celle de $(u_n))$.

- $(u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n) \Longrightarrow (u_n.a_n \underset{+\infty}{\sim} v_n.b_n)$.
- Dans les mêmes hypothèses que précédemment, si de plus il existe un rang à partir duquel $a_n \neq 0$ ainsi que b_n, on a :

$\dfrac{u_n}{a_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{b_n}$

Retenons : On obtient une suite équivalente au produit ou au quotient de deux suites en y remplaçant l'une (au moins) d'entre elles par une suite équivalente. **Conséquence : on ne change pas la limite d'un produit ou d'un quotient de suites en y remplaçant certaines d'entre elles par des équivalents**. D'où l'intérêt de connaître des équivalents simples.

Z → Aucune suite (u_n), sauf la suite nulle ou stationnaire et valant alors 0, à partir d'un certain rang, n'est équivalente à 0.

Z → $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ n'implique pas (en général) $(u_n + a_n) \underset{+\infty}{\sim} (v_n + b_n)$.

EQUIVALENCES CLASSIQUES

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \neq 0 \Longrightarrow u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow \ln(1 + u_n) \underset{+\infty}{\sim} u_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow e^{u_n} - 1 \underset{+\infty}{\sim} u_n$.
- Un polynôme non nul (de la variable n) est équivalent en $+\infty$ à son monôme de plus haut degré.

- Une fraction rationnelle non nulle (de la variable n) est équivalente en $+\infty$ au quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.
- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et u_n et v_n positifs strictement n'impliquent pas (en général) $\ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln v_n$.

Mais si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \neq 1$, alors : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \ln u_n \underset{+\infty}{\sim} \ln v_n$.

En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ ou $+\infty$.

- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ n'implique pas (en général) $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$.

En règle générale on ne compose pas les équivalents.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow 1 - \cos u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \Longrightarrow \sin u_n \underset{+\infty}{\sim} u_n$.

SUITE NEGLIGEABLE DEVANT UNE AUTRE SUITE

DEFINITION : *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\geq n_0}$ s'il existe une suite réelle (t_n), définie à partir d'un rang $n_1 \geq n_0$, telle que :*

Pour $n \geq n_1$, $u_n = v_n.t_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

Ecriture : On écrit $(u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)$.

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang (ce qui est le cas général),
$\left((u_n) \underset{n\to+\infty}{=} \circ(v_n)\right) \Longleftrightarrow \left(\lim\limits_{+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0\right)$.

PROPRIETES :

- $\left((u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)\right)$ et $\left((v_n \underset{+\infty}{=} \circ(w_n)\right) \Longrightarrow \left((u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(w_n)\right)$.
- $\left((u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)\right.$ et $\left.(v_n) \underset{+\infty}{\sim} (w_n)\right) \Longrightarrow (u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(w_n)\big)$.
- $\left((u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)\right.$ et $\left.(u_n) \underset{+\infty}{\sim} (w_n)\right) \Longrightarrow (w_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)\big)$.
- $\left((u_n) \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)\right) \Longrightarrow (u_n + v_n) \underset{+\infty}{\sim} v_n$

EXEMPLES CLASSIQUES

- $\ln n \underset{+\infty}{=} \circ(n)$. ; $n \underset{+\infty}{=} \circ(e^n)$.
- $n^\alpha \underset{+\infty}{=} \circ(e^{\beta n})$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. (croissances comparées) ; cela se traduit par :

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\beta n}}{n^\alpha} & = +\infty, \quad \text{pour } \beta \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \beta \in \mathbb{R}. \\ \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\alpha n} \times n^\beta & = 0, \quad \text{pour } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$