



RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



ALGEBRE

BILINEAIRE

L'ESPACE VECTORIEL NORME \mathbb{R}^n

NORMES SUR \mathbb{R}^n

NORMES ET DISTANCES ASSOCIEES

DEFINITION : On appelle norme sur \mathbb{R}^n toute application $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, N(x) \geq 0$ et $N(x) = 0 \iff x = 0$
- ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$
- iii) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

DEFINITION : On appelle distance associée à la norme N sur \mathbb{R}^n l'application définie sur $(\mathbb{R}^n)^2$ par : $d(x, y) = N(x - y) = N(y - x)$.

Notation : Une norme N sur \mathbb{R}^n est souvent notée $\|\cdot\|$, c'est-à-dire $N(x) = \|x\|$.

Exemples : Etant donné une base B de E ,

a) Une norme euclidienne associée à $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ sera définie par

$$\forall x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2};$$

b) Une norme " infinie " associée à $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ sera définie par

$$\forall x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|;$$

PROPOSITION : Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n et d la distance associée.

- i) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, d(x, y) = d(y, x)$ et $d(x, y) = 0 \iff x = y$
- ii) $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$
- iii) $\forall (x, y, z) \in (\mathbb{R}^n)^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

2 Espaces vectoriels normés

NORMES EQUIVALENTES

DEFINITION : Deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe $(k, k') \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, kN_1(x) \leq N_2(x) \leq k'N_1(x)$$

PROPOSITION : Les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ associées à une base B de \mathbb{R}^n sont équivalentes et plus précisément :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

PARTIES REMARQUABLES DE \mathbb{R}^n

On considère une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n et la distance d associée.

Boules ouvertes et fermées

DEFINITION : Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$:

* On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a, r)$, défini par :

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(a, x) < r\}$$

* On appelle boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B_f(a, r)$ (ou $B'(a, r)$), défini par :

$$B_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(a, x) \leq r\}$$

* On appelle sphère de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $S(a, r)$ défini par :

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n, d(a, x) = r\}$$

Exemple : Si $\|\cdot\|_2$ est la norme euclidienne canonique sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire $\forall x = (x_1, x_2), \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$;

$B(a, r)$ est l'intérieur du disque de centre a et de rayon r , $B_f(a, r)$ est le disque entier (cercle compris) et $S(a, r)$ est le cercle de centre a et de rayon r .

Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées

DEFINITION : Soit A une partie de \mathbb{R}^n

* A est une partie ouverte si et seulement si

$$(A = \emptyset) \text{ ou } (\forall a \in A, \exists r > 0, B(a, r) \subset A)$$

* A est une partie fermée si et seulement si $\overline{A} = \mathbb{R}^n - A$ est ouvert

* A est une partie bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A, \|x\| \leq M$ (ce qui revient à dire que $A \subset B_f(0, M)$)

Exemple \mathbb{R}^n et \emptyset sont des parties à la fois ouvertes et fermées.

PROPOSITION : Soit deux normes N_1 et N_2 sur \mathbb{R}^n , équivalentes.

- Toute boule ouverte pour N_1 est contenue dans une boule ouverte pour N_2 et contient une boule ouverte pour N_2 .
- Toute partie ouverte (resp. fermée, bornée) pour N_1 est ouverte (resp. fermée, bornée) pour N_2

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Remarque : c'est le cas lorsque les normes N_1 et N_2 sont les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ associées à une base de \mathbb{R}^n

Dorénavant, nous désignerons par $\|\cdot\|$ l'une des deux normes $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$ canoniques

PROPOSITION :

- Toute réunion d'ouverts de \mathbb{R}^n est un ouvert de \mathbb{R}^n .
- Toute intersection finie d'ouverts de \mathbb{R}^n est un ouvert de \mathbb{R}^n .
- Toute intersection de fermés de \mathbb{R}^n est un fermé de \mathbb{R}^n .
- Toute réunion finie de fermés de \mathbb{R}^n est un fermé de \mathbb{R}^n .
- Toute boule ouverte de \mathbb{R}^n est une partie ouverte de \mathbb{R}^n et toute boule fermée de \mathbb{R}^n est une partie fermée de \mathbb{R}^n .

Remarque : soit a et b deux réels tels que $a \leq b$.

$]a, b[,]-\infty, a[,]a, +\infty[$ sont des ouverts de \mathbb{R}

$[a, b],]-\infty, a], [a, +\infty[$ sont des fermés de \mathbb{R}

PROPOSITION : Une partie A de \mathbb{R}^n est bornée si et seulement s'il existe $(M_1, \dots, M_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que : $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ et $\forall i \in [1, n], |x_i| \leq M_i$

Adhérence et intérieur

DEFINITION : Soit $A \in \mathbb{R}^n$, on appelle adhérence de A la partie de \mathbb{R}^n , notée $\text{ad}(A)$ et définie par :

$$x \in \text{ad}(A) \iff \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

DEFINITION : Soit $A \subset \mathbb{R}^n$, on appelle intérieur de A la partie de \mathbb{R}^n notée $\overset{\circ}{A}$ et définie par :

$$x \in \overset{\circ}{A} \iff \exists r > 0, B(x, r) \subset A$$

Remarque : $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \text{ad}(A)$

Les définitions de $\text{ad}(A)$ et $\overset{\circ}{A}$ sont indépendantes de la norme $\|\cdot\|$ choisie ($\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$ canoniques).

PRODUIT SCALAIRE

PRODUIT SCALAIRE ET NORME EUCLIDIENNE

PRODUIT SCALAIRE

DEFINITION : Soit E un espace vectoriel réel. Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

est

page 3

Jean MALET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

4 Espaces vectoriels normés

i) bilinéaire si

$$\forall(x, y, z) \in E^3, \forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, \varphi(ax + by, z) = a\varphi(x, z) + b\varphi(y, z)$$

et si

$$\forall(x, y, z) \in E^3, \forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, \varphi(x, ay + bz) = a\varphi(x, y) + b\varphi(x, z),$$

ii) symétrique si

$$\forall(x, y) \in E^2, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$$

iii) définie positive si

$$\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0 \text{ et } \varphi(x, x) = 0 \iff x = 0_E$$

DEFINITION : Un produit scalaire sur E est une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui est bilinéaire, symétrique, définie positive.

$\varphi(x, y)$ sera souvent noté $\langle x, y \rangle$ ou $(x|y)$

PROPOSITION-1 : Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire si et seulement si elle est symétrique, linéaire d'un côté et définie positive.

Exemples classiques de produit scalaires canoniques :

Sur \mathbb{R}^n , muni de sa base canonique :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n), \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \langle X, Y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = {}^t X Y = {}^t Y X.$$

$$\text{Sur } \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) : \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

PROPOSITION-2 : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire \langle, \rangle , $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $(y_1, \dots, y_n) \in E^n$,

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^n \beta_j y_j \right\rangle = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \lambda_i \beta_j \langle x_i, y_j \rangle$$

NORME EUCLIDIENNE

DEFINITION : Soit $\langle . \rangle$ un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E , on associe sa norme euclidienne :

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

un vecteur x est dit normé ou unitaire si $\|x\| = 1$.

PROPOSITION-3 : $\forall(a, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

i) $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \iff x = 0_E$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

iii) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle$

page 4

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.