RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

DIAGONALISATION

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés les scalaires.

CHANGEMENT DE BASE

MATRICE DE PASSAGE D'UNE BASE A UNE AUTRE

Soit $\mathcal{B}_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E

Les vecteurs ε_j, pour $j \in [\![1, n]\!]$ s'expriment dans la base $\mathcal{B}_1$:

$\forall j \in [\![1, n]\!]\ \exists!(a_{1,j}, \ldots, a_{n,j}) \in \mathbb{R}^n\ /\ \varepsilon_j = a_{1,j}e_1 + a_{2,j}e_2 + \cdots + a_{i,j}e_i + \cdots + a_{n,j}e_n$.

Ce que nous pouvons écrire de manière plus concise : $\varepsilon_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$.

Notons C_j la matrice colonne des coordonnées de ε_j dans la base $\mathcal{B}_1$:

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

DEFINITION : *On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$ la matrice notée $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont $C_1, \ldots, C_n$.*

Donc P est la matrice de terme général $a_{i,j}$:

$$P = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque : si l'on regarde P comme la matrice d'un endomorphisme f de E, alors $\forall j \in [\![1, n]\!],\ f(e_j) = \varepsilon_j$. L'image d'une base de E est une base de E, donc f est un automorphisme de E et sa matrice P est inversible et P^{-1} est la matrice depassage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}_1$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

CHANGEMENT DE BASE POUR UN VECTEUR

Formule de changement de base pour un vecteur :

Soit X et X' les matrices colonnes des coordonnées d'un vecteur u d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle, dans deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement. Si l'on note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, on a la formule suivante : $X = PX'$, qui équivaut à $X' = P^{-1}X$

CHANGEMENT DE BASE POUR UN ENDOMORPHISME

Formule de changement de base pour un endomorphisme

Soit A et A' les matrices d'un endomorphisme f d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie non nulle dans deux bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ respectivement. Si l'on note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_1$ à la base $\mathcal{B}_2$, on a la formule suivante :

$$A' = P^{-1}AP.$$

Remarque : cette formule s'appelle aussi formule de changement de base pour une matrice carrée.

MATRICES SEMBLABLES

DEFINITION : *Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est semblable à B si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversible, telle que : $B = P^{-1}AP$.*

Remarque : Si $B = P^{-1}AP$, alors $A = PBP^{-1}$; donc si l'on pose $Q = P^{-1}$, cette égalité devient $A = Q^{-1}BQ$, c'est dire que B est semblable à A. On dira donc que A et B sont semblables.

Proposition : Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension n.

A et B sont semblables si et seulement s'il existe un endomorphisme f et deux bases de E tels que A et B soient les matrices de f dans ces deux bases de E.

Remarque : on a quelques propriétés évidentes :

- A est semblable à A ($P = I_n$).
- Si A et B sont semblables et si B et C sont semblables, alors A et C sont semblables.

MATRICES EQUIVALENTES

DEFINITION : *Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. On dit que A est équivalente à B si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et s'il existe une matrice $R \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible telles que : $B = RAP$.*

Remarque : A équivalente à B équivaut à B équivalente à A (on dira que A et B sont équivalentes).

A et B sont équivalentes si et seulement si elles représentent les matrices d'une même application linéaire, écrites dans des bases différentes de E et de F.

Cette notion de matrices équivalentes est bien-sûr valable si $p = n$, donc pour les matrices carrées et on a d'ailleurs la proposition suivante.

PROPOSITION : Soit A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

A et B semblables $\Longrightarrow$ A et B équivalentes.

La réciproque est fausse.

ELEMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

VALEURS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

DEFINITION : *Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel non nul et f un endomorphisme de E. Un scalaire λ est valeur propre de f si et seulement si* $\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}$.

PROPOSITION EQUIVALENTE

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel non nul et f un endomorphisme de E. Un scalaire λ est une valeur propre de f si et seulement si l'endomorphisme $f - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injectif.

Remarque : **soit f un endomorphisme de E ; alors $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f - 0 \operatorname{Id}_E)$, donc f n'est pas injectif si et seulement si 0 est valeur propre de f.**

Il est équivalent de dire : f est injectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de f.

CARACTERISATION D'UNE VALEUR PROPRE

Soit un scalaire λ et f un endomorphisme de E. λ est valeur propre de f si et seulement s'il existe un vecteur u **non nul** de E tel que $f(u) = \lambda u$.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE