RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

# APPLICATIONS LINEAIRES

**DEFINITION :** *Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f$ une application de $E$ dans $F$. On dit que $f$ est linéaire si et seulement si*

$\forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$

## CRITERES

Soit $E$ et $F$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f$ une application de $E$ dans $F$.

- $f$ est linéaire $\iff \forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$
  $f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad$ et $\qquad f(\lambda u) = \lambda f(u)$
- $f$ est linéaire $\iff \forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$
  $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$

**Exemples :** l'application identique de $E$ dans $E$, notée $\mathrm{Id}_E$ appartient à $\mathcal{L}(E)$. L'application nulle de $E$ dans $F$, notée $\Theta$, qui à tout vecteur $u$ de $E$ associe $0_F$ appartient à $\mathcal{L}(E,F)$

**NOTATIONS :** L'ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ se note $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$ si $F = E$.

## PROPRIETES, REGLES DE CALCULS

Soit $f$ une application linéaire de $E$ dans $F$.

$f(0_E) = 0_F$

$\forall u \in E,\ f(-u) = -f(u).$

$\forall (u,v) \in E^2,\ f(u-v) = f(u) - f(v).$

$\forall (u_1,\dots,u_k) \in E^k$ et $\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k,\ f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(u_i).$


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

## ISOMORPHISMES, ESPACES ISOMORPHES

**DEFINITIONS :** *Un isomorphisme d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel $E$ dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel $F$ est une application linéaire bijective de $E$ dans $F$.*

*S'il existe un isomorphisme de $E$ dans $F$, on dit que $E$ est isomorphe à $F$.*

**PROPOSITION : Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels et $f$ un isomorphisme de $E$ dans $F$. La bijection réciproque $f^{-1}$ est un isomorphisme de $F$ dans $E$.**

***Remarque*** : s'il existe un isomorphisme $f$ de $E$ dans $F$, il en existe automatiquement un, $f^{-1}$, de $F$ dans $E$ ; $F$ est donc isomorphe à $E$. Raison pour laquelle on dira que $E$ et $F$ sont isomorphes.

**NOTATIONS :** L'ensemble des isomorphismes de $E$ dans $F$ se notera $\text{Isom}\,(E,F)$.

## ENDOMORPHISMES, AUTOMORPHISMES

**DEFINITION :** *Un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$ est une application linéaire de $E$ dans $E$.*

### AUTOMORPHISMES

**DEFINITION :** *Un automorphisme d'un espace vectoriel $E$ est un endomorphisme bijectif de $E$.*

***Remarque*** : c'est un cas particulier d'isomorphisme (cas où $F = E$).

**NOTATION :** L'ensemble des automorphismes de $E$ se note $\text{Aut}\,(E)$.

***Remarque*** : $\text{Aut}(E)$ sera parfois noté $\text{GL}(E)$ et sera appelé groupe linéaire de $E$.

---

# OPERATIONS SUR LES APPLICATIONS LINEAIRES

---

Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels.

## ADDITION

**DEFINITION :** *Considérons deux éléments $f$ et $g$ de $\mathcal{L}(E,F)$. On définit l'application $f+g$ de $E$ dans $F$ par :*

$$\forall u \in E,\ (f+g)(u) = f(u) + g(u)$$

C'est en fait l'addition habituelle des applications.

**b) PROPOSITION :** $f+g \in \mathcal{L}(E,F)$.

**PROPRIETES**

- Pour tous $f,g,h$ dans $\mathcal{L}(E,F), (f+g)+h = f+(g+h)$. Résultat noté $f+g+h$.

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

- Pour tous $f, g$ dans $\mathcal{L}(E)$, $f+g=g+f$.
- Notons $\Theta$ l'application nulle de $E$ dans $F$ (elle appartient à $\mathcal{L}(E,F)$). Pour tout $f$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, $f+\Theta=\Theta+f=f$ ($\Theta$ est élément neutre pour l'addition).
- Pour tout $f$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, il existe un unique élément $f_1$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, tel que $f+f_1=f_1+f=\Theta$.

$f_1$ est défini par : $\forall u \in E,\ f_1(u)=-f(u)$ ; il est alors noté $-f$ et appelé l'opposé de $f$.

- Pour tous $f, g$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, il existe un unique élément $h$ de $\mathcal{L}(E,F)$, tel que $f+h=g$. On a $h=g+(-f)$, noté $h=g-f$.
- Pour tous $f, g, h$ dans $\mathcal{L}(E,F)$, $f+h=g+h \Longleftrightarrow f=g$ .

## MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

**DEFINITION :** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On définit l'application $\alpha f$ de $E$ dans $F$ par :* $\forall u \in E,\ (\alpha f)(u)=\alpha f(u)$.

**b) PROPOSITION :** $\alpha f \in \mathcal{L}(E,F)$.

**PROPRIETES :** $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ , $\forall (f,g) \in \Big(\mathcal{L}(E,F)\Big)^2$.

- $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$.
- $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$.
- $\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f$, noté $\alpha\beta f$.
- $1.f=f$.

**$\mathcal{L}(E,F)$ EST UN ESPACE VECTORIEL SUR $\mathbb{R}$**

**AUTRES PROPRIETES : ce sont celles des espaces vectoriels**

## COMPOSITION D'APPLICATIONS LINEAIRES

**PROPOSITION : Soit $E, F, G$ trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,G)$ ; alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.**

### PROPRIETES

Soit $E, F, G, H$ des espaces vectoriels ; les applications sont linéaires.

- Soit $f, g : E \longrightarrow F$, $h : F \longrightarrow G$. Alors

$h \circ (f+g)=h \circ f+h \circ g$ et $h \circ (f-g)=h \circ f-h \circ g$.

- Soit $f : E \longrightarrow F$, $g, h : F \longrightarrow G$. Alors

$(g+h) \circ f=g \circ f+h \circ f$ et $(g-h) \circ f=g \circ f-h \circ f$.

- Soit $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$, $h : G \longrightarrow H$. Alors

$(h \circ g) \circ f=h \circ (g \circ f)$, noté $h \circ g \circ f$ (c'est un résultat général de la composition des applications)

- $f : E \longrightarrow F$. Alors $\mathrm{Id}_F \circ f=f \circ Id_E=f$


© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

- Soit $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ ; $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$\alpha(g \circ f) = (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f)$, noté $\alpha g \circ f$.

$\mathbb{Z} \rightarrow f \circ g = \Theta$ (où $\Theta \in \mathcal{L}(E, G)) \not\Longrightarrow f = \Theta_1$ (où $\Theta_1 \in \mathcal{L}(E, G)$) ou $g = \Theta_2$ (où $\Theta_2 \in \mathcal{L}(F, G)$)

### CAS DE $\mathcal{L}(E)$

**1. Muni de l'addition et la multiplication par un scalaire, $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel , car c'est le cas particulier où $F = E$.**

**2.** La composition des applications est définie sur $\mathcal{L}(E)$ ; les propriétés précédentes sont valables dans $\mathcal{L}(E)$ (prendre $H = G = F = E$). La composition des applications est donc interne sur $\mathcal{L}(E)$, associative, **non commutative**, distributive par rapport à l'addition (et la soustraction) , l'$\mathrm{Id}_E$ est élément neutre pour la loi de composition .

---

# NOYAU, IMAGE, RANG

---

## CARACTERISATION DES APPLICATIONS LINEAIRES EN DIMENSION FINIE

**THEOREME : Soit $f$ une application d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel $E$, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$, dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel $F$.**

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \Longleftrightarrow \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

**THEOREME : Soit $E$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$, et $F$ un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Pour tous vecteurs $b_1, \ldots, b_n$ de $F$, il existe une unique application linéaire $h$ de $E$ dans $F$ telle que**

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ h(e_i) = b_i.$$

**Conséquences**

- **Une application linéaire $f$ de $E$ dans $F$ est entièrement déterminée par les vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $E$.**
- Deux applications linéaires $f$ et $g$ de $E$ dans $F$ sont égales si et seulement si, étant donné une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E$,

$\forall i \ / \ 1 \leq i \leq n,\ f(e_i) = g(e_i)$.

## NOYAU D'UNE APPLICATION LINEAIRE

**DEFINITION :** *Soit $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle noyau de $f$, et on note* $\mathrm{Ker}\, f$ *ou* $\mathrm{Ker}(f)$*, l'ensemble des vecteurs de $E$ dont l'image par $f$ est $O_F$.*


Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.