



RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



APPLICATIONS

LINEAIRES

APPLICATIONS LINEAIRES

DEFINITION : Soit E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{R} et f une application de E dans F . On dit que f est linéaire si et seulement si

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

CRITERES

Soit E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{R} et f une application de E dans F .

- f est linéaire $\iff \forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$
 $f(u + v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$
- f est linéaire $\iff \forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$
 $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$

Exemples : l'application identique de E dans E , notée Id_E appartient à $\mathcal{L}(E)$. L'application nulle de E dans F , notée Θ , qui à tout vecteur u de E associe 0_F appartient à $\mathcal{L}(E, F)$

NOTATIONS : L'ensemble des applications linéaires de E dans F se note $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$ si $F = E$.

PROPRIETES, REGLES DE CALCULS

Soit f une application linéaire de E dans F .

$$f(0_E) = 0_F$$

$$\forall u \in E, \quad f(-u) = -f(u).$$

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u - v) = f(u) - f(v).$$

$$\forall (u_1, \dots, u_k) \in E^k \text{ et } \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \quad f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(u_i).$$

2 Applications linéaires

ISOMORPHISMES, ESPACES ISOMORPHES

DEFINITIONS : *Un isomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E dans un \mathbb{R} -espace vectoriel F est une application linéaire bijective de E dans F .*

S'il existe un isomorphisme de E dans F , on dit que E est isomorphe à F .

PROPOSITION : *Soit E et F deux \mathbb{R} espaces vectoriels et f un isomorphisme de E dans F . La bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E .*

Remarque : s'il existe un isomorphisme f de E dans F , il en existe automatiquement un, f^{-1} , de F dans E ; F est donc isomorphe à E . Raison pour laquelle on dira que E et F sont isomorphes.

NOTATIONS : L'ensemble des isomorphismes de E dans F se notera $\text{Isom}(E, F)$.

ENDOMORPHISMES, AUTOMORPHISMES

DEFINITION : *Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans E .*

AUTOMORPHISMES

DEFINITION : *Un automorphisme d'un espace vectoriel E est un endomorphisme bijectif de E .*

Remarque : c'est un cas particulier d'isomorphisme (cas où $F = E$).

NOTATION : L'ensemble des automorphismes de E se note $\text{Aut}(E)$.

Remarque : $\text{Aut}(E)$ sera parfois noté $\text{GL}(E)$ et sera appelé groupe linéaire de E .

OPERATIONS SUR

LES APPLICATIONS LINEAIRES

Soit E et F deux \mathbb{R} espaces vectoriels.

ADDITION

DEFINITION : *Considérons deux éléments f et g de $\mathcal{L}(E, F)$. On définit l'application $f + g$ de E dans F par :*

$$\forall u \in E, (f + g)(u) = f(u) + g(u)$$

C'est en fait l'addition habituelle des applications.

b) PROPOSITION : $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$.

PROPRIETES

- Pour tous f, g, h dans $\mathcal{L}(E, F)$, $(f + g) + h = f + (g + h)$. Résultat noté $f + g + h$.

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

- Pour tous f, g dans $\mathcal{L}(E)$, $f + g = g + f$.
- Notons Θ l'application nulle de E dans F (elle appartient à $\mathcal{L}(E, F)$). Pour tout f dans $\mathcal{L}(E, F)$, $f + \Theta = \Theta + f = f$ (Θ est élément neutre pour l'addition).
- Pour tout f dans $\mathcal{L}(E, F)$, il existe un unique élément f_1 dans $\mathcal{L}(E, F)$, tel que $f + f_1 = f_1 + f = \Theta$.
 f_1 est défini par : $\forall u \in E, f_1(u) = -f(u)$; il est alors noté $-f$ et appelé l'opposé de f .
- Pour tous f, g dans $\mathcal{L}(E, F)$, il existe un unique élément h de $\mathcal{L}(E, F)$, tel que $f + h = g$. On a $h = g + (-f)$, noté $h = g - f$.
- Pour tous f, g, h dans $\mathcal{L}(E, F)$, $f + h = g + h \iff f = g$.

MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

DEFINITION : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit l'application αf de E dans F par : $\forall u \in E, (\alpha f)(u) = \alpha f(u)$.

b) PROPOSITION : $\alpha f \in \mathcal{L}(E, F)$.

PROPRIETES : $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$.

- $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$.
- $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$.
- $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$, noté $\alpha\beta f$.
- $1.f = f$.

$\mathcal{L}(E, F)$ EST UN ESPACE VECTORIEL SUR \mathbb{R}

AUTRES PROPRIETES : ce sont celles des espaces vectoriels

COMPOSITION D'APPLICATIONS LINEAIRES

PROPOSITION : Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur \mathbb{R} et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$; alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

PROPRIETES

Soit E, F, G, H des espaces vectoriels ; les applications sont linéaires.

- Soit $f, g : E \rightarrow F, h : F \rightarrow G$. Alors
 $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$ et $h \circ (f - g) = h \circ f - h \circ g$.
- Soit $f : E \rightarrow F, g, h : F \rightarrow G$. Alors
 $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$ et $(g - h) \circ f = g \circ f - h \circ f$.
- Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G, h : G \rightarrow H$. Alors
 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, noté $h \circ g \circ f$ (c'est un résultat général de la composition des applications)
- $f : E \rightarrow F$. Alors $\text{Id}_F \circ f = f \circ \text{Id}_E = f$

page 3

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

4 Applications linéaires

- Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G ; \alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$\alpha(g \circ f) = (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f)$, noté $\alpha g \circ f$.

$\mathbb{Z} \rightarrow f \circ g = \Theta$ (où $\Theta \in \mathcal{L}(E, G)$) $\nRightarrow f = \Theta_1$ (où $\Theta_1 \in \mathcal{L}(E, G)$) ou $g = \Theta_2$ (où $\Theta_2 \in \mathcal{L}(F, G)$)

CAS DE $\mathcal{L}(E)$

1. Muni de l'addition et la multiplication par un scalaire, $\mathcal{L}(E)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel, car c'est le cas particulier où $F = E$.

2. La composition des applications est définie sur $\mathcal{L}(E)$; les propriétés précédentes sont valables dans $\mathcal{L}(E)$ (prendre $H = G = F = E$). La composition des applications est donc interne sur $\mathcal{L}(E)$, associative, **non commutative**, distributive par rapport à l'addition (et la soustraction), l' Id_E est élément neutre pour la loi de composition.

NOYAU, IMAGE, RANG

CARACTERISATION DES APPLICATIONS LINEAIRES EN DIMENSION FINIE

THEOREME : Soit f une application d'un \mathbb{R} espace vectoriel E , muni d'une base (e_1, \dots, e_n) , dans un \mathbb{R} espace vectoriel F .

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$

THEOREME : Soit E un \mathbb{R} espace vectoriel muni d'une base (e_1, \dots, e_n) , et F un \mathbb{R} espace vectoriel. Pour tous vecteurs b_1, \dots, b_n de F , il existe une unique application linéaire h de E dans F telle que

$$\forall i \in [1, n], h(e_i) = b_i.$$

Conséquences

- Une application linéaire f de E dans F est entièrement déterminée par les vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$, où (e_1, \dots, e_n) est une base de E .
- Deux applications linéaires f et g de E dans F sont égales si et seulement si, étant donné une base (e_1, \dots, e_n) de E ,

$$\forall i / 1 \leq i \leq n, f(e_i) = g(e_i).$$

NOYAU D'UNE APPLICATION LINEAIRE

DEFINITION : Soit E et F deux \mathbb{R} espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle noyau de f , et on note $\text{Ker } f$ ou $\text{Ker}(f)$, l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est O_F .

page 4

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.