



## RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



## APPLICATIONS

## LINEAIRES

## APPLICATIONS LINEAIRES

**DEFINITION :** Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ . On dit que  $f$  est linéaire si et seulement si

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

CRITERES

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ .

- $f$  est linéaire  $\iff \forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$   
 $f(u + v) = f(u) + f(v)$  et  $f(\lambda u) = \lambda f(u)$
- $f$  est linéaire  $\iff \forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R},$   
 $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$

**Exemples :** l'application identique de  $E$  dans  $E$ , notée  $\text{Id}_E$  appartient à  $\mathcal{L}(E)$ . L'application nulle de  $E$  dans  $F$ , notée  $\Theta$ , qui à tout vecteur  $u$  de  $E$  associe  $0_F$  appartient à  $\mathcal{L}(E, F)$

**NOTATIONS :** L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  se note  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{L}(E)$  si  $F = E$ .

PROPRIETES, REGLES DE CALCULS

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

$$f(0_E) = 0_F$$

$$\forall u \in E, \quad f(-u) = -f(u).$$

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad f(u - v) = f(u) - f(v).$$

$$\forall (u_1, \dots, u_k) \in E^k \text{ et } \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k, \quad f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(u_i).$$

## 2 Applications linéaires

### ISOMORPHISMES, ESPACES ISOMORPHES

**DEFINITIONS :** *Un isomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  dans un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $F$  est une application linéaire bijective de  $E$  dans  $F$ .*

*S'il existe un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ , on dit que  $E$  est isomorphe à  $F$ .*

**PROPOSITION :** *Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$  espaces vectoriels et  $f$  un isomorphisme de  $E$  dans  $F$ . La bijection réciproque  $f^{-1}$  est un isomorphisme de  $F$  dans  $E$ .*

**Remarque :** s'il existe un isomorphisme  $f$  de  $E$  dans  $F$ , il en existe automatiquement un,  $f^{-1}$ , de  $F$  dans  $E$  ;  $F$  est donc isomorphe à  $E$ . Raison pour laquelle on dira que  $E$  et  $F$  sont isomorphes.

**NOTATIONS :** L'ensemble des isomorphismes de  $E$  dans  $F$  se notera  $\text{Isom}(E, F)$ .

### ENDOMORPHISMES, AUTOMORPHISMES

**DEFINITION :** *Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .*

#### AUTOMORPHISMES

**DEFINITION :** *Un automorphisme d'un espace vectoriel  $E$  est un endomorphisme bijectif de  $E$ .*

**Remarque :** c'est un cas particulier d'isomorphisme (cas où  $F = E$ ).

**NOTATION :** L'ensemble des automorphismes de  $E$  se note  $\text{Aut}(E)$ .

**Remarque :**  $\text{Aut}(E)$  sera parfois noté  $\text{GL}(E)$  et sera appelé groupe linéaire de  $E$ .

## OPERATIONS SUR

## LES APPLICATIONS LINEAIRES

Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$  espaces vectoriels.

### ADDITION

**DEFINITION :** *Considérons deux éléments  $f$  et  $g$  de  $\mathcal{L}(E, F)$ . On définit l'application  $f + g$  de  $E$  dans  $F$  par :*

$$\forall u \in E, (f + g)(u) = f(u) + g(u)$$

C'est en fait l'addition habituelle des applications.

**b) PROPOSITION :**  $f + g \in \mathcal{L}(E, F)$ .

### PROPRIETES

- Pour tous  $f, g, h$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ ,  $(f + g) + h = f + (g + h)$ . Résultat noté  $f + g + h$ .

page 2

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

- Pour tous  $f, g$  dans  $\mathcal{L}(E)$ ,  $f + g = g + f$ .
- Notons  $\Theta$  l'application nulle de  $E$  dans  $F$  (elle appartient à  $\mathcal{L}(E, F)$ ). Pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ ,  $f + \Theta = \Theta + f = f$  ( $\Theta$  est élément neutre pour l'addition).
- Pour tout  $f$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , il existe un unique élément  $f_1$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , tel que  $f + f_1 = f_1 + f = \Theta$ .  
 $f_1$  est défini par :  $\forall u \in E, f_1(u) = -f(u)$  ; il est alors noté  $-f$  et appelé l'opposé de  $f$ .
- Pour tous  $f, g$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , il existe un unique élément  $h$  de  $\mathcal{L}(E, F)$ , tel que  $f + h = g$ . On a  $h = g + (-f)$ , noté  $h = g - f$ .
- Pour tous  $f, g, h$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ ,  $f + h = g + h \iff f = g$ .

### MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

**DEFINITION :** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On définit l'application  $\alpha f$  de  $E$  dans  $F$  par :  $\forall u \in E, (\alpha f)(u) = \alpha f(u)$ .

**b) PROPOSITION :**  $\alpha f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

**PROPRIETES :**  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (f, g) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ .

- $\alpha(f + g) = \alpha f + \alpha g$ .
- $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ .
- $\alpha(\beta f) = (\alpha\beta)f$ , noté  $\alpha\beta f$ .
- $1.f = f$ .

$\mathcal{L}(E, F)$  EST UN ESPACE VECTORIEL SUR  $\mathbb{R}$

**AUTRES PROPRIETES :** ce sont celles des espaces vectoriels

### COMPOSITION D'APPLICATIONS LINÉAIRES

**PROPOSITION :** Soit  $E, F, G$  trois espaces vectoriels sur  $\mathbb{R}$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $g \in \mathcal{L}(F, G)$  ; alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

### PROPRIETES

Soit  $E, F, G, H$  des espaces vectoriels ; les applications sont linéaires.

- Soit  $f, g : E \rightarrow F, h : F \rightarrow G$ . Alors  
 $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$  et  $h \circ (f - g) = h \circ f - h \circ g$ .
- Soit  $f : E \rightarrow F, g, h : F \rightarrow G$ . Alors  
 $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$  et  $(g - h) \circ f = g \circ f - h \circ f$ .
- Soit  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G, h : G \rightarrow H$ . Alors  
 $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ , noté  $h \circ g \circ f$  (c'est un résultat général de la composition des applications)
- $f : E \rightarrow F$ . Alors  $\text{Id}_F \circ f = f \circ \text{Id}_E = f$

page 3

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

#### 4 Applications linéaires

- Soit  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G ; \alpha \in \mathbb{R}$ . Alors

$\alpha(g \circ f) = (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f)$ , noté  $\alpha g \circ f$ .

$\mathbb{Z} \rightarrow f \circ g = \Theta$  (où  $\Theta \in \mathcal{L}(E, G)$ )  $\nRightarrow f = \Theta_1$  (où  $\Theta_1 \in \mathcal{L}(E, G)$ ) ou  $g = \Theta_2$  (où  $\Theta_2 \in \mathcal{L}(F, G)$ )

#### CAS DE $\mathcal{L}(E)$

1. Muni de l'addition et la multiplication par un scalaire,  $\mathcal{L}(E)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, car c'est le cas particulier où  $F = E$ .
2. La composition des applications est définie sur  $\mathcal{L}(E)$ ; les propriétés précédentes sont valables dans  $\mathcal{L}(E)$  (prendre  $H = G = F = E$ ). La composition des applications est donc interne sur  $\mathcal{L}(E)$ , associative, **non commutative**, distributive par rapport à l'addition (et la soustraction), l' $\text{Id}_E$  est élément neutre pour la loi de composition.

---

## NOYAU, IMAGE, RANG

---

### CARACTERISATION DES APPLICATIONS LINEAIRES EN DIMENSION FINIE

**THEOREME** : Soit  $f$  une application d'un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $E$ , muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ , dans un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $F$ .

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \iff \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i).$$

**THEOREME** : Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ , et  $F$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel. Pour tous vecteurs  $b_1, \dots, b_n$  de  $F$ , il existe une unique application linéaire  $h$  de  $E$  dans  $F$  telle que

$$\forall i \in [1, n], h(e_i) = b_i.$$

#### Conséquences

- Une application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  est entièrement déterminée par les vecteurs  $f(e_1), \dots, f(e_n)$ , où  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ .
- Deux applications linéaires  $f$  et  $g$  de  $E$  dans  $F$  sont égales si et seulement si, étant donné une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ ,

$\forall i / 1 \leq i \leq n, f(e_i) = g(e_i)$ .

#### NOYAU D'UNE APPLICATION LINEAIRE

**DEFINITION** : Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{R}$  espaces vectoriels et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle noyau de  $f$ , et on note  $\text{Ker } f$  ou  $\text{Ker}(f)$ , l'ensemble des vecteurs de  $E$  dont l'image par  $f$  est  $O_F$ .

page 4

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.