RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

APPLICATIONS LINEAIRES

APPLICATIONS LINEAIRES

DEFINITION : *Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F. On dit que f est linéaire si et seulement si*

$\forall (u,v) \in E^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$

CRITERES

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et f une application de E dans F.

- f est linéaire $\Longleftrightarrow \forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(u+v) = f(u) + f(v) \qquad \text{et} \qquad f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

- f est linéaire $\Longleftrightarrow \forall (u,v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

Exemples : l'application identique de E dans E, notée Id_E appartient à $\mathcal{L}(E)$. L'application nulle de E dans F, notée Θ, qui à tout vecteur u de E associe 0_F appartient à $\mathcal{L}(E,F)$

NOTATIONS : L'ensemble des applications linéaires de E dans F se note $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$ si $F = E$.

PROPRIETES, REGLES DE CALCULS

Soit f une application linéaire de E dans F.

$f(0_E) = 0_F$

$\forall u \in E,\ f(-u) = -f(u).$

$\forall (u,v) \in E^2,\ f(u-v) = f(u) - f(v).$

$\forall (u_1,\dots,u_k) \in E^k$ et $\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k,\ f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(u_i).$

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

ISOMORPHISMES, ESPACES ISOMORPHES

DEFINITIONS : *Un isomorphisme d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E dans un $\mathbb{R}-$espace vectoriel F est une application linéaire bijective de E dans F.*

S'il existe un isomorphisme de E dans F, on dit que E est isomorphe à F.

PROPOSITION : Soit E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels et f un isomorphisme de E dans F. La bijection réciproque f^{-1} est un isomorphisme de F dans E.

Remarque : s'il existe un isomorphisme f de E dans F, il en existe automatiquement un, f^{-1}, de F dans E ; F est donc isomorphe à E. Raison pour laquelle on dira que E et F sont isomorphes.

NOTATIONS : L'ensemble des isomorphismes de E dans F se notera $\mathrm{Isom}\,(E,F)$.

ENDOMORPHISMES, AUTOMORPHISMES

DEFINITION : *Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans E.*

AUTOMORPHISMES

DEFINITION : *Un automorphisme d'un espace vectoriel E est un endomorphisme bijectif de E.*

Remarque : c'est un cas particulier d'isomorphisme (cas où $F = E$).

NOTATION : L'ensemble des automorphismes de E se note $\mathrm{Aut}\,(E)$.

Remarque : $\mathrm{Aut}(E)$ sera parfois noté $\mathrm{GL}(E)$ et sera appelé groupe linéaire de E.

OPERATIONS SUR LES APPLICATIONS LINEAIRES

Soit E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels.

ADDITION

DEFINITION : *Considérons deux éléments f et g de $\mathcal{L}(E,F)$. On définit l'application $f+g$ de E dans F par :*

$$\forall u \in E,\ \ (f+g)(u) = f(u) + g(u)$$

C'est en fait l'addition habituelle des applications.

b) PROPOSITION : $f+g \in \mathcal{L}(E,F)$.

PROPRIETES

- Pour tous f,g,h dans $\mathcal{L}(E,F), (f+g)+h = f+(g+h)$. Résultat noté $f+g+h$.

- Pour tous f, g dans $\mathcal{L}(E)$, $f+g=g+f$.
- Notons Θ l'application nulle de E dans F (elle appartient à $\mathcal{L}(E,F)$). Pour tout f dans $\mathcal{L}(E,F)$, $f+\Theta=\Theta+f=f$ (Θ est élément neutre pour l'addition).
- Pour tout f dans $\mathcal{L}(E,F)$, il existe un unique élément f_1 dans $\mathcal{L}(E,F)$, tel que $f+f_1=f_1+f=\Theta$.

f_1 est défini par : $\forall u \in E,\ f_1(u)=-f(u)$; il est alors noté $-f$ et appelé l'opposé de f.

- Pour tous f, g dans $\mathcal{L}(E,F)$, il existe un unique élément h de $\mathcal{L}(E,F)$, tel que $f+h=g$. On a $h=g+(-f)$, noté $h=g-f$.
- Pour tous f, g, h dans $\mathcal{L}(E,F)$, $f+h=g+h \Longleftrightarrow f=g$.

MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

DEFINITION : *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On définit l'application αf de E dans F par : $\forall u \in E,\ (\alpha f)(u)=\alpha f(u)$.*

b) PROPOSITION : $\alpha f \in \mathcal{L}(E,F)$.

PROPRIETES : $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\forall(f,g) \in \Big(\mathcal{L}(E,F)\Big)^2$.

- $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$.
- $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$.
- $\alpha(\beta f)=(\alpha\beta)f$, noté $\alpha\beta f$.
- $1.f=f$.

$\mathcal{L}(E,F)$ EST UN ESPACE VECTORIEL SUR $\mathbb{R}$

AUTRES PROPRIETES : ce sont celles des espaces vectoriels

COMPOSITION D'APPLICATIONS LINEAIRES

PROPOSITION : Soit E, F, G trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}(E,F),\ g \in \mathcal{L}(F,G)$; alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E,G)$.

PROPRIETES

Soit E, F, G, H des espaces vectoriels ; les applications sont linéaires.

- Soit $f, g : E \longrightarrow F$, $h : F \longrightarrow G$. Alors

$h \circ (f+g)=h \circ f+h \circ g$ et $h \circ (f-g)=h \circ f-h \circ g$.

- Soit $f : E \longrightarrow F$, $g, h : F \longrightarrow G$. Alors

$(g+h) \circ f=g \circ f+h \circ f$ et $(g-h) \circ f=g \circ f-h \circ f$.

- Soit $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$, $h : G \longrightarrow H$. Alors

$(h \circ g) \circ f=h \circ (g \circ f)$, noté $h \circ g \circ f$ (c'est un résultat général de la composition des applications)

- $f : E \longrightarrow F$. Alors $\mathrm{Id}_F \circ f=f \circ Id_E=f$

- Soit $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$; $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors
$\alpha(g \circ f) = (\alpha g) \circ f = g \circ (\alpha f)$, noté $\alpha g \circ f$.

Z $\rightarrow f \circ g = \Theta$ (où $\Theta \in \mathcal{L}(E,G)) \not\Rightarrow f = \Theta_1$ (où $\Theta_1 \in \mathcal{L}(E,G)$) ou $g = \Theta_2$ (où $\Theta_2 \in \mathcal{L}(F,G)$)

CAS DE $\mathcal{L}(E)$

1. Muni de l'addition et la multiplication par un scalaire, $\mathcal{L}(E)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel , car c'est le cas particulier où $F = E$.

2. La composition des applications est définie sur $\mathcal{L}(E)$; les propriétés précédentes sont valables dans $\mathcal{L}(E)$ (prendre $H = G = F = E$). La composition des applications est donc interne sur $\mathcal{L}(E)$, associative, **non commutative**, distributive par rapport à l'addition (et la soustraction) , l'Id_E est élément neutre pour la loi de composition .

NOYAU, IMAGE, RANG

CARACTERISATION DES APPLICATIONS LINEAIRES EN DIMENSION FINIE

THEOREME : Soit f une application d'un $\mathbb{R}$ espace vectoriel E, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$, dans un $\mathbb{R}$ espace vectoriel F.

$$f \in \mathcal{L}(E,F) \Longleftrightarrow \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i).$$

THEOREME : Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$, et F un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. Pour tous vecteurs $b_1, \ldots, b_n$ de F, il existe une unique application linéaire h de E dans F telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ h(e_i) = b_i.$$

Conséquences

- **Une application linéaire f de E dans F est entièrement déterminée par les vecteurs $f(e_1), \ldots, f(e_n)$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.**
- Deux applications linéaires f et g de E dans F sont égales si et seulement si, étant donné une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E,
$\forall i \ / \ 1 \leq i \leq n,\ f(e_i) = g(e_i)$.

NOYAU D'UNE APPLICATION LINEAIRE

DEFINITION : *Soit E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle noyau de f, et on note $\mathrm{Ker}\, f$ ou $\mathrm{Ker}(f)$, l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est O_F.*