



## RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



## ESPACES VECTORIELS

REELS

---



---

**ESPACES VECTORIELS**


---



---

Les éléments de  $\mathbb{R}$  sont appelés les scalaires.

**DEFINITION :** Soit  $E$  un ensemble non vide sur lequel on a défini une loi de composition interne (application de  $E \times E$  dans  $E$ ), notée additivement, et une loi de composition externe admettant  $\mathbb{R}$  comme ensemble d'opérateurs (application de  $\mathbb{R} \times E$  dans  $E$ ).

On dit que  $E$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  (ou un  $\mathbb{R}$ -ev) si et seulement si les deux lois de composition satisfont aux propriétés suivantes :

- Pour l'addition, loi de composition interne ;

$$\forall (x, y, z) \in E^3$$

Commutativité :  $x + y = y + x$ .

Associativité :  $x + (y + z) = (x + y) + z$  (résultat noté  $x + y + z$ ).

Existence d'un élément neutre, c'est-à-dire : il existe dans  $E$  un unique élément, noté  $0_E$ , satisfaisant à la propriété suivante :

$$\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x.$$

Existence d'un symétrique pour chaque élément de  $E$ , appelé opposé, c'est-à-dire :  $\forall x \in E$ , il existe un unique élément de  $E$ , noté  $-x$ , tel que :  $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$ .

- Pour la loi de composition externe sur  $\mathbb{R}$ , appelée multiplication par un scalaire,

$$\forall (x, y) \in E^2, \text{ et } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

$$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x ; \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y ; \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x ; \text{ résultat noté } \lambda\mu x ; 1x = x.$$

**Remarque :** Les éléments de  $E$  sont appelés les vecteurs

**Exemples fondamentaux**

$$\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R}[X], \mathbb{R}_n[X]$$

L'ensemble des applications définies sur une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$ , l'ensemble des applications de classe  $C^n$  sur une partie  $X$  de  $\mathbb{R}$ . En particulier, pour  $n = 0$  (fonctions continues sur  $X$ ) et  $n = 1$  (fonctions dérivables à dérivée continue) etc...

## 2 Espaces vectoriels

### Règles de calcul dans les espaces vectoriels

$\forall (x, y, z) \in E^3, (x + z = y + z \iff x = y)$ .

$\forall (x, y) \in E^2, \exists ! z \in E / x + z = y$ . Cet élément  $z$  vaut  $y + (-x)$  et on le note  $y - x$ .

$\forall x \in E$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{R} ; \lambda x = 0_E \iff (\lambda = 0)$  ou  $(x = 0_E)$ .

$\forall x \in E, (-1)x = -x$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2, \lambda x = \lambda y \iff (\lambda = 0)$  ou  $x = y$ .

$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E, \lambda x = \mu x \iff (x = 0_E)$  ou  $(\lambda = \mu)$ .

---

## SOUS-ESPACES VECTORIELS

---

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $F$  un sous ensemble (non vide) de  $E$ .

**DEFINITION :** On dit que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si  $F$  est un espace vectoriel pour les deux opérations, l'addition et la multiplication par un scalaire, qui font de  $E$  un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel .

### CRITERES

Un sous-ensemble  $F$ , non vide, d'un espace vectoriel  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si et seulement si

- $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, x + y \in F$  et  $\lambda x \in F$ .

ou

- $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2, \lambda x + \alpha y \in F$ .

ou

- $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda y \in F$ .

**Remarque :** si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $0_E \in F$  ; donc si  $0_E \notin F$ , alors  $F$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$ .

### INTERSECTION DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

L'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel  $E$  est sous-espace vectoriel de  $E$ .

### COMBINAISONS LINEAIRES

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $n$  vecteurs de  $E$  et  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$   $n$  éléments de  $\mathbb{R}$ .

**DEFINITION :** Le vecteur  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  s'appelle combinaison linéaire des vecteurs  $x_i$ , les scalaires  $\lambda_i$  étant les coefficients de la combinaison linéaire.

**TERMINOLOGIE** : Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et  $x_1, \dots, x_n$   $n$  vecteurs de  $E$ .

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires que l'on peut former avec les vecteurs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se note  $\text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

$\text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$ .

**PROPOSITION** :  $\text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est sous-espace vectoriel de  $E$ .

### GENERATEURS

**DEFINITION** :  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  s'appelle une famille génératrice de

$\text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

On dira, de manière équivalente, que  $\text{vect}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est engendré par la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

**DEFINITION** : Soit  $F$  un sous-espace vectoriel d'un espace  $E$  et  $(u_1, u_2, \dots, u_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ . On dit que cette famille est génératrice de  $F$  si et seulement si tous les vecteurs  $u_i$  sont dans  $F$  et tout vecteur de  $F$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs  $u_i$ . Cela revient à  $F = \text{vect}(u_1, u_2, \dots, u_p)$ .

### EXEMPLES CLASSIQUES

**Exemple-1** :  $E = \mathbb{R}^n$ . Considérons la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_i \dots e_n)$  des vecteurs de  $E$  définis de la manière suivante :

$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$  (le chiffre 1 étant à la  $i^{\text{ème}}$  place), est la famille génératrice canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple-2** :  $E = \mathbb{R}_n[X]$ . Considérons la famille  $P_k$ ,  $(0 \leq k \leq n)$  d'éléments de  $E$  définis de la manière suivante :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $P_k(x) = x^k$  (autrement dit  $P_k$  est le monôme de degré  $k$  de coefficient 1) est la famille génératrice canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Remarque** : le polynôme  $P_k$  est aussi noté  $X^k$

**Exemple-3** :  $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ .

$\forall (i, j) \mid 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq p$ ,  $E_{i,j}$  est la matrice de  $E$  dont tous les termes sont nuls sauf celui qui est à la  $i^{\text{ème}}$  ligne,  $j^{\text{ème}}$  colonne et qui vaut 1. La famille  $(E_{i,j})$  s'appelle la famille génératrice canonique de  $E$ .

---

## FAMILLES DE VECTEURS

---

**DEFINITION** : On dit que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre (ou que les vecteurs sont linéairement indépendants) si et seulement si l'équation  $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E$ , d'inconnues les scalaires  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , n'a pas d'autre solution que la solution, dite triviale,  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**DEFINITION** : On dit que la famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est liée (ou que les vecteurs sont linéairement dépendants) si et seulement s'il existe  $n$  scalaires  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  **non tous nuls** tels que  $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \dots + \beta_n u_n = 0_E$ .

page 3

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

## 4 Espaces vectoriels

**Remarque – 1** : il apparaît que les notions de famille libre et de famille liée sont contraires : une famille de vecteurs de  $E$  est libre ou (exclusif) liée.

**Remarque – 2** : pour décider si une famille  $(u_1, \dots, u_n)$  de vecteurs de  $E$  est libre ou liée, on considère l'équation

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E \quad \text{et on entreprend de la résoudre :}$$

\* S'il n'y a que la solution  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , on conclut que la famille est libre,

\*\* sinon, on exhibe un  $n$ -uplet  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ ,  $b_1, b_2, \dots, b_n$  **non tous nuls**, solution de l'équation et on conclut que la famille est liée.

### PROPRIETES DES FAMILLES DE VECTEURS

- –1 Toute famille de vecteurs contenue dans une famille libre est libre.
- –2 Toute famille de vecteurs qui contient une famille liée est elle même liée.
- –3 Une famille réduite à un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.
- –4 Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

**Remarque** : deux vecteurs  $u, v$  forment une famille liée si et seulement si l'un est combinaison linéaire de l'autre, c'est-à-dire si et seulement si il existe un scalaire  $k$  tel  $u = kv$  ou  $v = ku$ .

On dit alors que ces vecteurs sont colinéaires.

Dans le cas de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , cela signifie que les deux  $n$ -uplets sont proportionnels.

---

## BASES D'UN ESPACE VECTORIEL

---

**DEFINITION** : Une famille  $(u_1, \dots, u_n)$  d'un espace vectoriel  $E$  est une base de  $E$  si et seulement si elle est libre et génératrice de  $E$ .

### **BASES CANONIQUES**

- Dans  $\mathbb{R}^n$ , la famille génératrice canonique  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$
- Dans  $\mathbb{R}_n[X]$ , la famille génératrice canonique  $(P_0, \dots, P_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}_n[X]$

**Remarque** : On pose aussi  $X^k = P_k$  avec  $X^0 = 1 = P_0$

- Dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ , la famille génératrice canonique  $(E_{i,j}) / 1 \leq i \leq n$  et  $1 \leq j \leq p$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

### **BASE D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev,  $F$  un sous espace vectoriel de  $E$  et  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ .

**DEFINITION** : On dit que  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$  est une base de  $F$  si  $(f_1, f_2, \dots, f_p)$  est libre et génératrice de  $F$ .

page 4

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.