RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ESPACES VECTORIELS

REELS

ESPACES VECTORIELS

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés les scalaires.

DEFINITION : *Soit E un ensemble non vide sur lequel on a défini une loi de composition interne (application de $E \times E$ dans E) , notée additivement, et une loi de composition externe admettant $\mathbb{R}$ comme ensemble d'opérateurs (application de $\mathbb{R} \times E$ dans E).*

On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}-ev$) si et seulement si les deux lois de composition satisfont aux propriétés suivantes :

- Pour l'addition, loi de composition interne ;

$\forall (x, y, z) \in E^3$

Commutativité : $x + y = y + x$.

Associativité : $x + (y + z) = (x + y) + z$ (résultat noté $x + y + z$).

Existence d'un élément neutre, c'est-à-dire : il existe dans E un unique élément, noté 0_E, satisfaisant à la propriété suivante :

$\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$.

Existence d'un symétrique pour chaque élément de E, appelé opposé, c'est-à-dire : $\forall x \in E$, il existe un unique élément de E, noté $-x$, tel que : $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$.

- Pour la loi de composition externe sur $\mathbb{R}$, appelée multiplication par un scalaire,

$\forall (x, y) \in E^2$, et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; résultat noté $\lambda\mu x$; $1x = x$.

Remarque : Les éléments de E sont appelés les vecteurs

<u>Exemples fondamentaux</u>

$\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$

L'ensemble des applications définies sur une partie X de $\mathbb{R}$, l'ensemble des applications de classe C^n sur une partie X de $\mathbb{R}$. En particulier, pour $n = 0$ (fonctions continues sur X) et $n = 1$ (fonctions dérivables à dérivée continue) etc...

Règles de calcul dans les espaces vectoriels

$\forall (x,y,z) \in E^3, (x+z = y+z \Longleftrightarrow x = y)$.

$\forall (x,y) \in E^2,\ \exists ! z \in E\ \ /\ x+z = y$. Cet élément z vaut $y+(-x)$ et on le note $y-x$.

$\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda x = 0_E \Longleftrightarrow (\lambda = 0)$ ou $(x = 0_E)$.

$\forall x \in E,\ (-1)x = -x$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in E^2,\ \lambda x = \lambda y \Longleftrightarrow (\lambda = 0)$ ou $x = y$.

$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in E,\ \lambda x = \mu x \Longleftrightarrow (x = 0_E)$ ou $(\lambda = \mu)$.

SOUS-ESPACES VECTORIELS

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et F un sous ensemble (non vide) de E.

DEFINITION : *On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est un espace vectoriel pour les deux opérations, l'addition et la multiplication par un scalaire, qui font de E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel .*

CRITERES

Un sous-ensemble F, non vide, d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, x+y \in F$ et $\lambda x \in F$.

  ou
- $\forall (x,y) \in F^2, \forall (\lambda,\alpha) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda x + \alpha y \in F$.

  ou
- $\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad x + \lambda y \in F$.

Remarque : si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E \in F$; donc si $0_E \notin F$, alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

INTERSECTION DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

L'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E est sous-espace vectoriel de E.

COMBINAISONS LINEAIRES

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n éléments de $\mathbb{R}$.

DEFINITION : *Le vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ s'appelle combinaison linéaire des vecteurs x_i, les scalaires λ_i étant les coefficients de la combinaison linéaire.*

TERMINOLOGIE : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs de E.

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires que l'on peut former avec les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ se note $\text{vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$\text{vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \ / \ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$.

PROPOSITION : $\text{vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est sous-espace vectoriel de E.

GENERATEURS

DEFINITION : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *s'appelle une famille génératrice de*

$\text{vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

On dira, de manière équivalente, que $\text{vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est engendré par la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

DEFINITION : *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace E et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est génératrice de F si et seulement si tous les vecteurs u_i sont dans F et tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs u_i.* Cela revient à $F = \text{vect}\,(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

EXEMPLES CLASSIQUES

Exemple−1 : $E = \mathbb{R}^n$. Considérons la famille $(e_1, e_2, \dots e_i \dots e_n)$ des vecteurs de E définis de la manière suivante :

$\forall i \in [\![1;n]\!],\ e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (le chiffre 1 étant à la $i^{\text{ème}}$ place), est la famille génératrice canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple−2 : $E = \mathbb{R}_n[X]$. Considérons la famille $P_k,\ (0 \leq k \leq n)$ d'éléments de E définis de la manière suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_k(x) = x^k$ (autrement dit P_k est le monôme de degré k de coefficient 1) est la famille génératrice canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque : le polynôme P_k est aussi noté X^k

Exemple−3 : $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$\forall (i,j) \ / \ 0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq p,\ E_{i,j}$ est la matrice de E dont tous les termes sont nuls sauf celui qui est à la $i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne et qui vaut 1. La famille $(E_{i,j})$ s'appelle la famille génératrice canonique de E.

FAMILLES DE VECTEURS

DEFINITION : *On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre (ou que les vecteurs sont linéairement indépendants) si et seulement si l'équation $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E$, d'inconnues les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, n'a pas d'autre solution que la solution, dite triviale, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

DEFINITION : *On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée (ou que les vecteurs sont linéairement dépendants) si et seulement s'il existe n scalaires $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$* **non tous nuls** *tels que $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n = 0_E$.*

Remarque – 1 : il apparaît que les notions de famille libre et de famille liée sont contraires : une famille de vecteurs de E est libre ou (exclusif) liée.

Remarque – 2 : pour décider si une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est libre ou liée, on considère l'équation

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E$ et on entreprend de la résoudre :

* S'il n'y a que la solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, on conclut que la famille est libre,

** sinon, on exhibe un $n-$uplet $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ **non tous nuls** , solution de l'équation et on conclut que la famille est liée.

PROPRIETES DES FAMILLES DE VECTEURS

- **-1 Toute famille de vecteurs contenue dans une famille libre est libre.**
- **-2 Toute famille de vecteurs qui contient une famille liée est elle même est liée.**
- **-3 Une famille réduite à un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.**
- **-4 Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.**

Remarque : deux vecteurs u, v forment une famille liée si et seulement si l'un est combinaison linéaire de l'autre, c'est-à-dire si et seulement si il existe un scalaire k tel $u = kv$ ou $v = ku$.

On dit alors que ces vecteurs sont colinéaires.

Dans le cas de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, cela signifie que les deux $n-$uplets sont proportionnels.

BASES D'UN ESPACE VECTORIEL

DEFINITION : *Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ d'un espace vectoriel E est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice de E.*

BASES CANONIQUES

- Dans $\mathbb{R}^n$, la famille génératrice canonique $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$
- Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille génératrice canonique $(P_0, \dots, P_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

Remarque : On pose aussi $X^k = P_k$ avec $X^0 = 1 = P_0$

- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la famille génératrice canonique $(E_{i,j})$ / $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

BASE D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, F un sous espace vectoriel de E et $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ une famille de p vecteurs de E.

DEFINITION : *On dit que $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une base de F si $(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est libre et génératrice de F.*