RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ESPACES VECTORIELS

REELS

ESPACES VECTORIELS

Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés les scalaires.

DEFINITION : *Soit E un ensemble non vide sur lequel on a défini une loi de composition interne (application de $E \times E$ dans E) , notée additivement, et une loi de composition externe admettant $\mathbb{R}$ comme ensemble d'opérateurs (application de $\mathbb{R} \times E$ dans E).*

On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}-ev$) si et seulement si les deux lois de composition satisfont aux propriétés suivantes :

- Pour l'addition, loi de composition interne ;

$\forall (x, y, z) \in E^3$

Commutativité : $x + y = y + x$.

Associativité : $x + (y + z) = (x + y) + z$ (résultat noté $x + y + z$).

Existence d'un élément neutre, c'est-à-dire : il existe dans E un unique élément, noté 0_E, satisfaisant à la propriété suivante :

$\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$.

Existence d'un symétrique pour chaque élément de E, appelé opposé, c'est-à-dire : $\forall x \in E$, il existe un unique élément de E, noté $-x$, tel que : $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$.

- Pour la loi de composition externe sur $\mathbb{R}$, appelée multiplication par un scalaire,

$\forall (x, y) \in E^2$, et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; résultat noté $\lambda\mu x$; $1x = x$.

Remarque : Les éléments de E sont appelés les vecteurs

Exemples fondamentaux

$\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$

L'ensemble des applications définies sur une partie X de $\mathbb{R}$, l'ensemble des applications de classe C^n sur une partie X de $\mathbb{R}$. En particulier, pour $n = 0$ (fonctions continues sur X) et $n = 1$ (fonctions dérivables à dérivée continue) etc...

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

Règles de calcul dans les espaces vectoriels

$\forall (x,y,z) \in E^3, (x+z = y+z \Longleftrightarrow x = y)$.

$\forall (x,y) \in E^2,\ \exists\, !z \in E\ \ / \ x+z = y$. Cet élément z vaut $y+(-x)$ et on le note $y-x$.

$\forall x \in E$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; $\lambda x = 0_E \Longleftrightarrow (\lambda = 0)$ ou $(x = 0_E)$.

$\forall x \in E,\ (-1)x = -x$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (x,y) \in E^2,\ \lambda x = \lambda y \Longleftrightarrow (\lambda = 0)$ ou $x = y$.

$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in E,\ \lambda x = \mu x \Longleftrightarrow (x = 0_E)$ ou $(\lambda = \mu)$.

SOUS-ESPACES VECTORIELS

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et F un sous ensemble (non vide) de E.

DEFINITION : *On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est un espace vectoriel pour les deux opérations, l'addition et la multiplication par un scalaire, qui font de E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel .*

CRITERES

Un sous-ensemble F, non vide, d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $\forall (x,y) \in F^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, x+y \in F$ et $\lambda x \in F$.

  ou

- $\forall (x,y) \in F^2, \forall (\lambda,\alpha) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda x + \alpha y \in F$.

  ou

- $\forall (x,y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad x + \lambda y \in F$.

Remarque : si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E \in F$; donc si $0_E \notin F$, alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

INTERSECTION DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

L'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E est sous-espace vectoriel de E.

COMBINAISONS LINEAIRES

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ n vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n éléments de $\mathbb{R}$.

DEFINITION : *Le vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ s'appelle combinaison linéaire des vecteurs x_i, les scalaires λ_i étant les coefficients de la combinaison linéaire.*

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

TERMINOLOGIE : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $x_1, \ldots, x_n$ n vecteurs de E.

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires que l'on peut former avec les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se note $\text{vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

$\text{vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \ / \ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}$.

PROPOSITION : $\text{vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est sous-espace vectoriel de E.

GENERATEURS

DEFINITION : $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *s'appelle une famille génératrice de* $\text{vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

On dira, de manière équivalente, que $\text{vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est engendré par la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

DEFINITION : *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace E et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est génératrice de F si et seulement si tous les vecteurs u_i sont dans F et tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs u_i.* Cela revient à $F = \text{vect}\,(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

EXEMPLES CLASSIQUES

Exemple−1 : $E = \mathbb{R}^n$. Considérons la famille $(e_1, e_2, \ldots e_i \ldots e_n)$ des vecteurs de E définis de la manière suivante :

$\forall i \in [\![1; n]\!]$, $e_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (le chiffre 1 étant à la $i^{\text{ème}}$ place), est la famille génératrice canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple−2 : $E = \mathbb{R}_n[X]$. Considérons la famille P_k, $(0 \leq k \leq n)$ d'éléments de E définis de la manière suivante : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_k(x) = x^k$ (autrement dit P_k est le monôme de degré k de coefficient 1) est la famille génératrice canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque : le polynôme P_k est aussi noté X^k

Exemple−3 : $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

$\forall (i, j) \ / \ 0 \leq i \leq n, \ 0 \leq j \leq p$, $E_{i,j}$ est la matrice de E dont tous les termes sont nuls sauf celui qui est à la $i^{ème}$ ligne, $j^{ème}$ colonne et qui vaut 1. La famille $(E_{i,j})$ s'appelle la famille génératrice canonique de E.

FAMILLES DE VECTEURS

DEFINITION : *On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre (ou que les vecteurs sont linéairement indépendants) si et seulement si l'équation $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E$, d'inconnues les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, n'a pas d'autre solution que la solution, dite triviale, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

DEFINITION : *On dit que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est liée (ou que les vecteurs sont linéairement dépendants) si et seulement s'il existe n scalaires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$* **non tous nuls** *tels que $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n = 0_E$.*

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.

Remarque – 1 : il apparaît que les notions de famille libre et de famille liée sont contraires : une famille de vecteurs de E est libre ou (exclusif) liée.

Remarque – 2 : pour décider si une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de vecteurs de E est libre ou liée, on considère l'équation

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E$ et on entreprend de la résoudre :

* S'il n'y a que la solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, on conclut que la famille est libre,

** sinon, on exhibe un $n-$uplet $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ **non tous nuls** , solution de l'équation et on conclut que la famille est liée.

PROPRIETES DES FAMILLES DE VECTEURS

- **-1 Toute famille de vecteurs contenue dans une famille libre est libre.**
- **-2 Toute famille de vecteurs qui contient une famille liée est elle même est liée.**
- **-3 Une famille réduite à un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.**
- **-4 Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.**

Remarque : deux vecteurs u, v forment une famille liée si et seulement si l'un est combinaison linéaire de l'autre, c'est-à-dire si et seulement si il existe un scalaire k tel $u = kv$ ou $v = ku$.

On dit alors que ces vecteurs sont colinéaires.

Dans le cas de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, cela signifie que les deux $n-$uplets sont proportionnels.

BASES D'UN ESPACE VECTORIEL

DEFINITION : *Une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ d'un espace vectoriel E est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice de E.*

BASES CANONIQUES

- Dans $\mathbb{R}^n$, la famille génératrice canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$
- Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la famille génératrice canonique $(P_0, \ldots, P_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

Remarque : On pose aussi $X^k = P_k$ avec $X^0 = 1 = P_0$

- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la famille génératrice canonique $(E_{i,j})$ / $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

BASE D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL

Soit E un $\mathbb{R}$-ev, F un sous espace vectoriel de E et $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une famille de p vecteurs de E.

DEFINITION : *On dit que $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une base de F si $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est libre et génératrice de F.*

 © EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 12 pages.