ESPACES VECTORIELS

ESPACES VECTORIELS

Z → $\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour la voie scientifique. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés les scalaires.

DEFINITION : *Soit E un ensemble non vide sur lequel on a défini une loi de composition interne (application de $E \times E$ dans E) , notée additivement, et une loi de composition externe admettant $\mathbb{K}$ comme ensemble d'opérateurs (application de $\mathbb{K} \times E$ dans E).*

On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou un $\mathbb{K}-ev$) si et seulement si les deux lois de composition satisfont aux propriétés suivantes :

- Pour l'addition, loi de composition interne ;

$\forall (x, y, z) \in E^3$

Commutativité : $x + y = y + x$.

Associativité : $x + (y + z) = (x + y) + z$ (résultat noté $x + y + z$).

Existence d'un élément neutre, c'est-à-dire : il existe dans E un unique élément, noté 0_E, satisfaisant à la propriété suivante :

$\forall x \in E, x + 0_E = 0_E + x = x$.

Existence d'un symétrique pour chaque élément de E, appelé opposé, c'est-à-dire : $\forall x \in E$, il existe un unique élément de E, noté $-x$, tel que : $x + (-x) = (-x) + x = 0_E$.

- Pour la loi de composition externe sur $\mathbb{K}$, appelée multiplication par un scalaire,

$\forall (x, y) \in E^2$, et $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$; $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; résultat noté $\lambda\mu x$; $1x = x$.

Remarque : Les éléments de E sont appelés les vecteurs

Exemples fondamentaux

$\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$

L'ensemble des applications définies sur une partie X de $\mathbb{R}$, l'ensemble des applications de classe C^n sur une partie X de $\mathbb{R}$. En particulier, pour $n = 0$ (fonctions continues sur X) et $n = 1$ (fonctions dérivables à dérivée continue) etc...

Règles de calcul dans les espaces vectoriels

$\forall(x,y,z)\in E^3, (x+z=y+z \Longleftrightarrow x=y)$.

$\forall(x,y)\in E^2,\ \exists!z\in E\ \ /\ x+z=y$. Cet élément z vaut $y+(-x)$ et on le note $y-x$.

$\forall x\in E$ et $\forall\lambda\in\mathbb{K}$; $\lambda x=0_E \Longleftrightarrow (\lambda=0)$ ou $(x=0_E)$.

$\forall x\in E,\ (-1)x=-x$

$\forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\forall(x,y)\in E^2,\ \lambda x=\lambda y \Longleftrightarrow (\lambda=0)$ ou $x=y$.

$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ \lambda x=\mu x \Longleftrightarrow (x=0_E)$ ou $(\lambda=\mu)$.

SOUS-ESPACES VECTORIELS

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et F un sous ensemble (non vide) de E.

DEFINITION : *On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est un espace vectoriel pour les deux opérations, l'addition et la multiplication par un scalaire, qui font de E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel .*

CRITERES

Un sous-ensemble F, non vide, d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $\forall(x,y)\in F^2,\ \forall\lambda\in\mathbb{K}, x+y\in F$ et $\lambda x\in F$.

  ou
- $\forall(x,y)\in F^2, \forall(\lambda,\alpha)\in\mathbb{K}^2,\quad \lambda x+\alpha y\in F$.

  ou
- $\forall(x,y)\in F^2, \forall\lambda\in\mathbb{K},\quad x+\lambda y\in F$.

Remarque : si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $0_E\in F$; donc si $0_E\notin F$, alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

INTERSECTION DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

L'intersection d'une famille quelconque de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E est sous-espace vectoriel de E.

COMBINAISONS LINEAIRES

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $x_1,x_2,\ldots,x_n$ n vecteurs de E et $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ n éléments de $\mathbb{K}$.

DEFINITION : *Le vecteur $x=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ s'appelle combinaison linéaire des vecteurs x_i, les scalaires λ_i étant les coefficients de la combinaison linéaire.*

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

TERMINOLOGIE : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs de E.

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires que l'on peut former avec les vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ se note $\mathrm{vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$\mathrm{vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \ / \ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$.

PROPOSITION : $\mathrm{vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est sous-espace vectoriel de E.

GENERATEURS

DEFINITION : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *s'appelle une famille génératrice de* $\mathrm{vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

On dira, de manière équivalente, que $\mathrm{vect}\,(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est engendré par la famille $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

DEFINITION : *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace E et $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E. On dit que cette famille est génératrice de F si et seulement si tous les vecteurs u_i sont dans F et tout vecteur de F peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs u_i.* Cela revient à $F = \mathrm{vect}\,(u_1, u_2, \dots, u_p)$.

EXEMPLES CLASSIQUES

Exemple−1 : $E = \mathbb{K}^n$. Considérons la famille $(e_1, e_2, \dots e_i \dots e_n)$ des vecteurs de E définis de la manière suivante :

$\forall i \in [\![1; n]\!],\ e_i = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ (le chiffre 1 étant à la $i^{\text{ème}}$ place), est la famille génératrice canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exemple−2 : $E = \mathbb{K}_n[X]$. Considérons la famille $P_k,\ (0 \leq k \leq n)$ d'éléments de E définis de la manière suivante : $\forall x \in \mathbb{K},\ P_k(x) = x^k$ (autrement dit P_k est le monôme de degré k de coefficient 1) est la famille génératrice canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque : le polynôme P_k est aussi noté X^k

Exemple−3 : $E = \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$\forall (i,j)\ /\ 0 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq p,\ E_{i,j}$ est la matrice de E dont tous les termes sont nuls sauf celui qui est à la $i^{ème}$ ligne, $j^{ème}$ colonne et qui vaut 1. La famille $(E_{i,j})$ s'appelle la famille génératrice canonique de E.

FAMILLES DE VECTEURS

DEFINITION : *On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre (ou que les vecteurs sont linéairement indépendants) si et seulement si l'équation $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E$, d'inconnues les scalaires $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$, n'a pas d'autre solution que la solution, dite triviale, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.*

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

DEFINITION : *On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée (ou que les vecteurs sont linéairement dépendants) si et seulement s'il existe n scalaires $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$* **non tous nuls** *tels que $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n = 0_E$.*

Remarque* −*1 : il apparaît que les notions de famille libre et de famille liée sont contraires : une famille de vecteurs de E est libre ou (exclusif) liée.

Remarque* −*2 : pour décider si une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E est libre ou liée, on considère l'équation

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0_E$ et on entreprend de la résoudre :

* S'il n'y a que la solution $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, on conclut que la famille est libre,

** sinon, on exhibe un $n-$uplet $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $b_1, b_2, \dots, b_n$ **non tous nuls** , solution de l'équation et on conclut que la famille est liée.

<u>PROPRIETES DES FAMILLES DE VECTEURS</u>

- **−1 Toute famille de vecteurs contenue dans une famille libre est libre.**
- **−2 Toute famille de vecteurs qui contient une famille liée est elle même est liée.**
- **−3 Une famille réduite à un vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.**
- **−4 Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.**

Remarque : deux vecteurs u, v forment une famille liée si et seulement si l'un est combinaison linéaire de l'autre, c'est-à-dire si et seulement si il existe un scalaire k tel $u = kv$ ou $v = ku$.

On dit alors que ces vecteurs sont colinéaires.

Dans le cas de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, cela signifie que les deux $n-$uplets sont proportionnels.

BASES D'UN ESPACE VECTORIEL

DEFINITION : *Une famille $(u_1, \dots, u_n)$ d'un espace vectoriel E est une base de E si et seulement si elle est libre et génératrice de E.*

BASES CANONIQUES

- Dans $\mathbb{K}^n$, la famille génératrice canonique $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$
- Dans $\mathbb{K}_n[X]$, la famille génératrice canonique $(P_0, \dots, P_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$

Remarque : On pose aussi $X^k = P_k$ avec $X^0 = 1 = P_0$

- Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la famille génératrice canonique $(E_{i,j})$ / $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$