RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

POLYNOMES

POLYNOMES

$\mathbb{K}$ représentera $\mathbb{R}$ pour les étudiants de la voie économique et indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour les étudiants de la voie scientifique (sauf bien-sûr lorsque cela leur sera précisé).

Les éléments de $\mathbb{K}$ seront appelés les scalaires : ce seront les nombres réels pour la voie E et indifferemment les réels ou les complexes pour la voie scientifique.

DEFINITION : *Soit f une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$. On dit que f est une application polynomiale (ou plus simplement un polynôme), s'il existe un nombre fini de scalaires $a_0, a_1, \cdots, a_n$ tels que :*

pour tout $x \in \mathbb{K}$, on ait $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

Les scalaires $a_0, a_1, \cdots, a_n$ s'appellent les coefficients de f.

Notations : Une fonction polynomiale s'écrira plutôt P, Q etc... c'est-à-dire $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$,$\forall x \in \mathbb{K}$, le polynôme s'écrira P (ou $P(X)$) $= \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ où X^k représente le polynôme $x \longmapsto x^k$ et la convention $X^0 = 1$: $x \longmapsto 1$

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se notera $\mathbb{K}[X]$.

Un cas particulier, le polynôme nul . Un polynôme est la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls : ce polynôme s'appelle le polynôme nul et se notera (0)

Egalité de deux polynômes : soit deux polynômes P et Q définis par $\forall x \in \mathbb{K}, P(x) = \sum_{k=0}^{k=p} a_kx^k$, $Q(x) = \sum_{k=0}^{k=q} b_kx^k$.

$P = Q$ si et seulement si $P = Q = (0)$ ou $p = q$ et $\forall k \in \{1 \dots p\}, a_k = b_k$.

DEGRE D'UN POLYNOME

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$; on appelle monôme l'application qui à $x \in \mathbb{K}$ associe ax^k.

Si $a = 0$, c'est l'application nulle ; si $a \neq 0$, le nombre k s'appelle degré du monôme.

DEFINITION : *Soit P un polynôme non nul : $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Il existe au moins un entier $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_k \neq 0$ (sinon le polynôme P serait le polynôme nul). Soit p le plus grand indice $i \in [\![0, n]\!]$, tel que $a_i \neq 0$. p s'appelle le degré du polynôme P et se note $\deg P$.*

Donc $p \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$: $\deg P = p$ équivaut à $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$, avec $a_p \neq 0$.

les termes $a_i x^i$ où $i \in [\![0, p]\!]$ sont appelés monômes de degré i de P ; le terme a_p est appelé le terme dominant du polynôme P.

Convention : Le polynôme nul a pour degré $-\infty$

Notation : Soit n un entier naturel. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont le degré est inférieur ou égal à n se notera $\mathbb{K}_n[X]$. Il contient le polynôme nul.

OPERATIONS

ADDITION

Soient deux polynômes P et Q ; $P(x) = \sum_{k=0}^{k=p} a_k x^k$ et $Q(x) = \sum_{k=0}^{k=q} b_k x^k$. On peut toujours supposer $p \leq q$. Appelons, d'une manière générale s le plus grand des deux entiers p et q, et écrivons

$Q(x) = \sum_{k=0}^{k=s} b_k x^k$ et $P(x) = \sum_{k=0}^{k=s} a_k x^k$ (on rajoute $a_{p+1} = \cdots a_s = 0$, si $p < q$).

DEFINITION : *on définit la somme $P + Q$ par :*

$(P + Q)(x) = P(x) + Q(x) = \sum_{k=0}^{k=s} (a_k + b_k) x^k$. $\forall x \in \mathbb{K}$. C'est la définition habituelle de la somme des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ dans laquelle on a regroupé les monômes de même degré.

PROPRIETES

- L'addition est commutative : $P + Q = Q + P$, $\forall (P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$.
- L'addition est associative : $(P+Q)+R = P+(Q+R)$, $\forall (P, Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^3$.
- Le polynôme nul, noté (0), est élément neutre : $(0) + P = P + (0) = P$, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$.
- Existence d'un opposé : pour tout polynôme P, il existe un unique polynôme S tel que $P + S = (0)$; si $P(x) = \sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$, on a $S(x) = \sum_{k=0}^{k=n} -a_k x^k$.

Ce polynôme S sera noté $-P$.

$\forall (P, Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^3$, $(P + Q = P + R \Longleftrightarrow Q = R)$ (simplification).

MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE

DEFINITION : *Si P est un polynôme défini par $P(x) = \sum_{k=0}^{k=p} a_k x^k$, et si λ est un scalaire quelconque, on définit le produit $\lambda.P$ par la formule :*