RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

FONCTIONS DE DEUX VARIABLE

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES REELLES

DISTANCE

DEFINITION : *On appelle distance sur* $\mathbb{R}^2$*, toute application, notée* d*, de* $(\mathbb{R}^2)^2$ *dans* $\mathbb{R}$*, possédant les propriétés suivantes :*

1) $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ d(u,v) \geq 0.$

2) $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ (d(u,v) = 0) \Longleftrightarrow (u = v).$

3) $\forall (u,v) \in (\mathbb{R}^2)^2,\ d(u,v) = d(v,u).$

4) $\forall (u,v,w) \in (\mathbb{R}^2)^3,\ d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v).$

Remarque : La propriété **2)** s'appelle l'axiome de séparation, la propriété **3)** s'appelle la symétrie, la propriété **4)** s'appelle l'inégalité triangulaire.

LA DISTANCE EUCLIDIENNE d_2.

Pour tout $u = (x,y)$ et $v = (a,b)$ éléments de $\mathbb{R}^2$,

$$d_2(u,v) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

On convient d'identifier (x,y) avec le point M du plan de coordonnées (x,y) dans un repère orthonormé du plan. Notons A le point de coordonnées (a,b), on voit que $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = AM$ (longueur du segment $[AM]$).

C'est la seule distance utilisée en voie E.

Remarque : Pour la voie S, la distance est aussi le distance euclidienne : la seule différence est qu'elle est présentée comme la norme euclidienne de $u - v$. Nous noterons encore d_2 cette distance.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

BOULES

DEFINITIONS

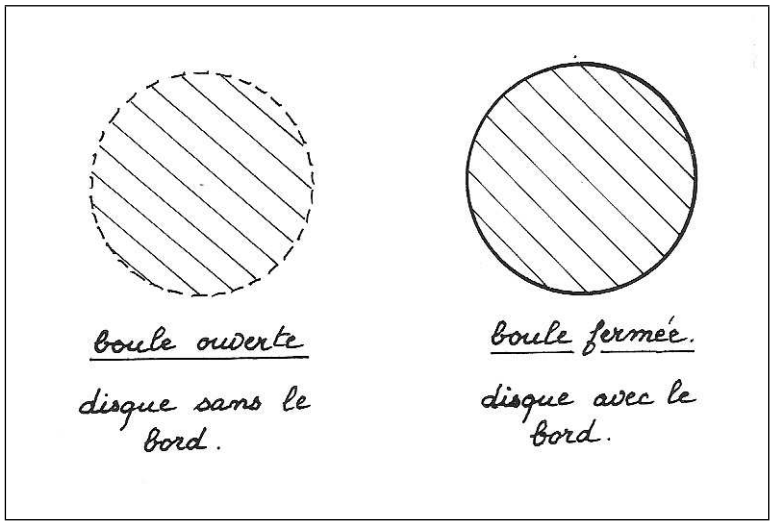
Boule ouverte : Soit $u_0 = (x_0, y_0)$ un élément de $\mathbb{R}^2$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, *on appelle boule ouverte de centre* u_0 *de rayon* ε, *l'ensemble, noté* $B(u_0, \varepsilon)$, *des couples* $u \in \mathbb{R}^2$, *tels que* $d_2(u_0, u) < \varepsilon$. D'où $B(u_0, \varepsilon) = \{u \in \mathbb{R}^2 \ / \ d(u_0, u) < \varepsilon\}$.

Boule fermée :

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, *On appelle boule fermée de centre* u_0 *de rayon* ε, *l'ensemble, noté* $B'(u_0, \varepsilon)$, *des couples* $u \in \mathbb{R}^2$, *tels que* $d_2(u_0, u) \leq \varepsilon$. D'où $B'(u_0, \varepsilon) = \{u \in \mathbb{R}^2 \ / \ d(u_0, u) \leq \varepsilon\}$.

Représentation géométrique



PROPRIETES

Soit $u_0 = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon, \varepsilon_1$ deux réels strictement positifs.

$B(u_0, \varepsilon) \cap B(u_0, \varepsilon_1) = B(u_0, \varepsilon_0)$ où $\varepsilon_0 = \inf(\varepsilon, \varepsilon_1)$ ($\inf(\varepsilon, \varepsilon_1)$ étant le plus petit des 2 réels ε et ε_1).

$B(u_0, \varepsilon) \subset B'(u_0, \varepsilon)$

PARTIES OUVERTES

DEFINITION : *Soit* A *une partie de* $\mathbb{R}^2$. A *est une partie ouverte de* E *si et seulement si* A *est vide ou pour tout* $u \in A$, $\exists \alpha > 0 \ / \ B'(u, \alpha) \subset A$.

Une boule ouverte est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Remarque : On peut également dire A est une partie ouverte de E si et seulement si A est vide ou pour tout $u \in A$, $\exists \alpha > 0 \ / \ B(u, \alpha) \subset A$.

PROPRIETES

- La réunion d'un nombre quelconque de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.
- L'intersection d'un nombre fini de parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

pt $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

Remarque : Une partie ouverte est en général caractérisée par des inégalités strictes.

- Une boule fermée n'est pas une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

PARTIES FERMEES

DEFINITION : *Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$. A est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si son complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.*

Une boule fermée est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

PROPRIETES

- La réunion d'un nombre fini de parties fermées de $\mathbb{R}^2$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
- L'intersection d'un nombre quelconque de parties fermées de $\mathbb{R}^2$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{R}^2$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.
- L'ensemble vide est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Cela peut paraître bizarre, mais c'est ainsi. Que le lecteur se " rassure " , $\mathbb{R}^2$ et $\emptyset$ sont les deux seules parties de $\mathbb{R}^2$ qui sont à la fois ouvertes et fermées.

Remarque : • Une partie fermée est en général caractérisée par des inégalités larges.

- Si une partie de $\mathbb{R}^2$ est ouverte (resp fermée) pour une distance, elle l'est aussi pour toute autre distance sur $\mathbb{R}^2$.

PARTIES BORNEES

DEFINITION : *Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est bornée si et seulement s'il existe une boule fermée (ou ouverte) telle que A soit incluse dans cette boule.*

A est bornée si et seulement si $\exists\, u_0 \in \mathbb{R}^2,\ \exists\, \alpha > 0\ /\ A \subset B(u_0, \alpha)$.

Remarque : • Si une partie de $\mathbb{R}^2$ est bornée pour une distance, elle l'est aussi pour toute autre distance sur $\mathbb{R}^2$.

Il est équivalent de dire $\exists\, M \geq 0,\ /\ \forall u = (x, y) \in A,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq M$.

LIMITE

DEFINITION : *Soit A une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$ et f une application de A dans $\mathbb{R}$. Soit $u_0 = (x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$. On dit qu'un nombre réel ℓ est limite de f en (x_0, y_0) si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0\ /\ \forall (x, y) \in B'(u_0, \alpha) \cap A,\ |f(x, y) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Ecritures : $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = \ell$ ou $\lim\limits_{(x_0,y_0)} f = \ell$

ou $f(x, y) \underset{(x,y)\to(x_0,y_0)}{\to} \ell$.

THEOREME : Si une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admet en un point (x_0, y_0) une limite réelle, cette limite est unique.

OPERATIONS SUR LES LIMITES FINIES

Ce sont les mêmes que pour les fonctions réelles. Somme, produit, quotient (la limite du dénominateur étant non nulle), racine carrée d'une fonction positive, produit par un réel, puissance.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.

On montre, comme pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que si $u_0 \in D_f$ et si f admet une limite réelle en u_0, nécessairement cette limite est égale à $f(u_0)$.

EXTENSION : *On dit qu'une fonction f définie sur une partie ouverte non vide $A \subset \mathbb{R}^2$ a pour limite $+\infty$ en $u_0 = (x_0, y_0)$ si et seulement si*

$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \ \forall u = (x, y) \in A \cap B'(u_0, \alpha), \ f(x, y) \geq B.$

On dit qu'une fonction f définie sur une partie ouverte non vide $A \subset \mathbb{R}^2$ a pour limite $-\infty$ en $u_0 = (x_0, y_0)$ si et seulement si

$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \ \forall u = (x, y) \in A \cap B'(u_0, \alpha), \ f(x, y) \leq B.$

CONTINUITE

DEFINITIONS : Soit A une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^2$. Soit f une application de A dans $\mathbb{R}$ *et $u_0 = (x_0, y_0) \in A$. On dit que f est continue en (x_0, y_0) si et seulement si* $\lim\limits_{(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

On dit que f est continue sur A si f est continue en tout point de A.

OPERATIONS

Ce sont les mêmes que pour les fonctions réelles : la somme, le produit de fonctions continues sur A est une fonction continue sur A. Le produit d'une fonction continue sur A par un réel est une fonction continue sur A . Le quotient de 2 fonctions continues sur A est une fonction continue sur A , pourvu que le dénominateur ne s'annule pas.

La racine carrée d'une fonction, positive, continue sur A est continue en A.

- **COMPOSITION DES FONCTIONS CONTINUES**

1) Soit I un intervalle ouvert, non vide, de $\mathbb{R}$ et u et v, deux applications de I dans $\mathbb{R}$.

Considérons une partie A de $\mathbb{R}^2$, ouverte, non vide et une application f continue de A dans $\mathbb{R}$. Posons, pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = (u(t), v(t))$; autrement dit, φ est une application de I dans $\mathbb{R}^2$. **Supposons que** $\forall t \in I, \ \varphi(t) \in A$.

La composée $g = f \circ \varphi$ est alors une application de I dans $\mathbb{R}$.

On montre que si u et v sont continues sur I et si f est continue sur A, $g : t \longmapsto f(u(t), v(t))$ est continue sur I.

2) Considérons une partie A de $\mathbb{R}^2$, ouverte, non vide et une application f de A dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle ouvert, non vide, de $\mathbb{R}$ et u une application de I dans $\mathbb{R}$. **Supposons que** $\forall (x, y) \in A, \ f(x, y) \in I$. La composée $g = u \circ f$ est alors une application de A dans $\mathbb{R}$.

On montre que si u est continue sur I et f continue sur A, $g : (x, y) \longmapsto u(f(x, y))$ est continue sur A.

THEOREME : Toute fonction continue sur une partie F de $\mathbb{R}^2$ fermée, bornée admet un maximum et un minimum : c'est-à-dire qu'il existe $(u_1, u_2) \in F^2$ /

$$\forall u \in F, \ f(u_1) \leq f(u) \leq f(u_2)$$

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 11 pages.