RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

FONCTIONS RELLES

FONCTIONS REELLES

PARITE

DEFINITION : *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et D_f son ensemble de définition.*

On dit que f est paire si $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ *et* $f(-x) = f(x)$.

On dit que f est impaire si $\forall x \in D_f$, $-x \in D_f$ *et* $f(-x) = -f(x)$.

Si on représente $\mathbb{R}$ par un axe $(O, \vec{\imath})$, pour une fonction paire, comme pour une fonction impaire, D_f est symétrique par rapport à O.

Incidences sur la représentation graphique : pour une fonction paire, la courbe représentative C_f, construite dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (orthogonal) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $\left(O, \vec{\jmath}\right)$. Pour une fonction impaire, la courbe représentative C_f, est symétrique par rapport à l'origine O.

PERIODICITE

DEFINITION : *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est périodique s'il existe un nombre réel $T > 0$ tel que*

$$\forall x \in D_f, (x+T) \in D_f,\ (x-T) \in D_f \text{ et } f(x+T) = f(x).$$

La période est le plus petit réel $T > 0$, s'il existe, satisfaisant aux conditions précédentes.

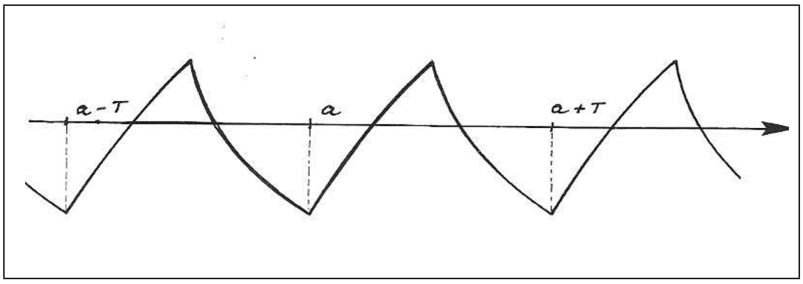
Interprétations géométriques

On représente $\mathbb{R}$ par un axe $(O, \vec{\imath})$. D_f est invariant par la translation de vecteur $kT.\vec{\imath}$ où $k \in \mathbb{Z}^*$. La courbe C_f représentative de f est aussi invariante par cette translation.

Incidence sur la représentation graphique :

Il suffit d'étudier f sur un ensemble $[a, a+T] \cap D_f$, puis d'effectuer les translations de vecteurs $T\vec{\imath}$ et $-T\vec{\imath}$, et plus généralement les translations de vecteurs $kT\vec{\imath}$, où $k \in \mathbb{Z}^*$.

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE



FONCTION BORNEE

FONCTION MAJOREE

DEFINITION : *Une fonction f définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est majorée sur D_f si et seulement si*

$$\exists \ B \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in D_f \, , \ f(x) \leq B.$$

B ne doit évidemment pas dépendre de x. On dit que B est un majorant de f sur D_f.

FONCTION MINOREE

DEFINITION : *Une fonction f définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est minorée sur D_f si et seulement si*

$$\exists \ A \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in D_f \, , \ A \leq f(x).$$

A ne doit évidemment pas dépendre de x. On dit que A est un minorant de f sur D_f.

FONCTION BORNEE

DEFINITION : *Une fonction f définie sur une partie D_f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée sur D_f si elle est minorée et majorée sur D_f.*

$$\exists \ (A, B) \in \mathbb{R}^2, (A \leq B) \ / \ \ \forall x \in D_f \, , \ A \leq f(x) \leq B.$$

Cela revient à dire que $|f|$ est majorée.

FONCTION MONOTONE

FONCTION CROISSANTE

DEFINITION : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point). On dit que f est croissante au sens large sur I si et seulement si*

$$\forall (x, x') \in I^2 \ \ , \ x < x' \Longrightarrow f(x) \leq f(x')$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est croissante au sens strict sur I (ou strictement croissante) si

$$\forall (x, x') \in I^2 \ \ , \ x < x' \Longrightarrow f(x) < f(x').$$

FONCTION DECROISSANTE

DEFINITION : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point). On dit que f est décroissante au sens large sur I si et seulement si*

$$\forall (x, x') \in I^2 \ \ , \ x < x' \Longrightarrow f(x) \geq f(x')$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que f est décroissante au sens strict sur I si et seulement si

$$\forall (x, x') \in I^2 \ , \ x < x' \Longrightarrow f(x) > f(x')$$

FONCTION MONOTONE

DEFINITION : *Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (non vide et non réduit à un point). On dit que f est monotone au sens large (resp au sens strict) sur I si et seulement si f est croissante ou décroissante au sens large (resp au sens strict).*

LIMITE

VOISINAGES

DEFINITIONS : *On dit qu'une fonction f est définie au voisinage de x_0 s'il existe un intervalle fermé, de centre x_0, de rayon $r > 0$ (noté $I(x_0, r)$) inclus dans D_f (ensemble de définition de f), c'est-à-dire $\exists r > 0 \ / \ I(x_0, r) \subset D_f$.*

On dit que f est définie au voisinage de x_0 , sauf peut-être en x_0, s'il existe un intervalle fermé, de centre x_0 , de rayon $r > 0$ (noté $I(x_0, r)$) tel que $\Big(I(x_0, r) - \{x_0\}\Big) \subset D_f$.

Cela n'interdit pas à f d'être définie en x_0.

VOISINAGE A DROITE, A GAUCHE

DEFINITIONS : *On dit que f est définie à droite de x_0 s'il existe $r > 0$ tel que $[x_0, x_0 + r] \subset D_f$.*

On dit que f est définie à droite de x_0, sauf peut-être en x_0, s'il existe $r > 0$ tel que $]x_0, x_0 + r] \subset D_f$.

On dit que f est définie à gauche de x_0 s'il existe $r > 0$ tel que $[x_0 - r, x_0] \subset D_f$.

On dit que f est définie à gauche de x_0, sauf peut-être en x_0, s'il existe $r > 0$ tel que $[x_0 - r, x_0[\subset D_f$.

LIMITE REELLE EN UN POINT

DEFINITION : *Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 et ℓ est un nombre réel. On dit que ℓ est limite de f en x_0 si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \alpha > 0 \ / \ \ \forall x \in I(x_0, \alpha) \cap D_f \ \ , \ |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On peut traduire cette proposition de manière équivalente par

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \alpha > 0 \ / \ \ \forall x \in D_f \ , \big(|x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\big).$$

Ecritures permises :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \ \text{ ou } \ \lim_{x_0} f = \ell$$

<u>UNICITE DE LA LIMITE</u> : Si une fonction réelle f admet en un point x_0 une limite réelle ℓ , cette limite est unique.

Cas où x_0 est dans D_f

Si f admet une limite ℓ en x_0, alors $\ell = f(x_0)$.

<u>LIMITE A DROITE</u>, <u>A GAUCHE</u>

DEFINITIONS : *Soit f une fonction réelle définie à droite de x_0 , sauf peut-être en x_0, et soit un réel ℓ. On dit que ℓ est limite de f en x_0 à droite si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in D_f \cap \ ]x_0, x_0 + \alpha] \ , \ |f(x_0) - \ell| \leq \varepsilon$$

ou $\quad \forall x \in D_f, \ (0 < x - x_0 \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$

Ecritures permises :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell, \ \lim_{x_0^+} f = \ell, \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \ell.$$

Soit f une fonction réelle définie à gauche de x_0, sauf peut-être en x_0, et soit un réel ℓ. On dit que ℓ est limite de f en x_0 à gauche si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in D_f \cap [x_0 - \alpha, x_0[\ , \ |f(x_0) - \ell| \leq \varepsilon$$

ou $\quad \forall x \in D_f, \ (0 < x_0 - x \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$

Ecritures permises :

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell, \ \lim_{x_0^-} f = \ell, \ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \ell.$$

<u>CRITERE</u>

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0, sauf peut-être en x_0.

f admet en x_0 une limite réelle si et seulement si f admet une limite réelle en x_0 à droite et à gauche et ces deux limites sont égales.

Si, de plus, f est définie en x_0, la valeur commune de ces deux limites est $f(x_0)$.

Remarque : Si f admet en x_0 des limites à droite et à gauche **différentes**, alors f n'a pas de limite en x_0

LIMITE INFINIE

DEFINITIONS : *On dit qu'une fonction f, définie au voisinage d'un point x_0, sauf en x_0, a pour limite $+\infty$ en x_0 si et seulement si*

$$\forall A \in \mathbb{R} \ , \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in D_f \cap I(x_0, \alpha) \ , f(x) \geq A$$

Les écritures permises sont les mêmes, il suffit de changer la lettre ℓ en $+\infty$.

On dit qu'une fonction f, définie au voisinage d'un point x_0, sauf en x_0 a pour limite $-\infty$ si

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists\, \alpha > 0\ /\ \forall x \in D_f \cap I(x_0, \alpha),\ \ f(x) \leq B$$

Limite à droite $= +\infty$:

$\lim\limits_{x_0^+} f = +\infty \Longleftrightarrow$

$$\forall A \in \mathbb{R}\ , \exists \alpha > 0\ /\ \forall x \in D_f \cap\ ]x_0, x_0 + \alpha], f(x) \geq A$$

Limite à droite $= -\infty$

$\lim\limits_{x_0^+} f = -\infty \Longleftrightarrow$

$$\forall B \in \mathbb{R}\ , \exists \alpha > 0\ /\ \ \forall x \in D_f \cap]x_0, x_0 + \alpha]\ \ ,\ f(x) \leq B$$

Nous laissons aux lecteurs le soin de donner les définitions des limites à gauche.

CRITERE DE LIMITE

Soit f une fonction définie au voisinage d'un nombre réel x_0, sauf peut-être en x_0.

1) f admet en x_0 une limite si et seulement si f admet des limites à droite et à gauche égales.

2) Si $f(x_0)$ existe, ces deux limites doivent être égales à $f(x_0)$.

CRITERE DE NON LIMITE

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0, sauf peut-être en x_0. f n'admet pas de limite en x_0 si et seulement si

1) f n'a pas de limite en x_0 à droite ou à gauche ou

2) f admet des limites en x_0 à droite et à gauche : deux cas sont alors à envisager :

1 er cas : $f(x_0)$ existe et l'une des deux limites est différente de $f(x_0)$.

2 ème cas : $f(x_0)$ n'existe pas et les deux limites sont différentes.

LIMITE EN L'INFINI

DEFINITIONS : *Soit f définie sur* $[a, +\infty[$, où a est un réel.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \quad = \ell \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists A \geq a,\ \ /\ \forall x \in [A, +\infty[\ , \quad |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

$$\lim_{+\infty} f \quad = +\infty \Longleftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \geq a,\ \ /\ \forall x \in [A, +\infty[\ , \quad f(x) \geq B.$$

$$\lim_{+\infty} f \quad = -\infty \Longleftrightarrow \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \geq a,\ \ /\ \forall x \in [A, +\infty[\ , \quad f(x) \leq B.$$

FONCTIONS MONOTONES BORNEES

THEOREME : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b[$ ou $]a, b[$ $(a < b)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée), alors f admet en b une limite finie.

Le résultat est le même si $b = +\infty$ ou $a = -\infty$.

Nous laissons le soin aux lecteurs d'établir le théorème correspondant lorsque $x \to a$.

Nous laissons le soin aux lecteurs de donner les définitions correspondant au cas où $x \to -\infty$.

OPERATIONS SUR LES LIMITES

Convention d'écriture : Les résultats seront valables lorsque $x \to x_0$ ou $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. Pour ne pas répéter des énoncés semblables, nous écrirons de manière générale $\lim\limits_{\blacksquare} f$ ($x \to \blacksquare$ voudra dire $x \to x_0$ ou $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$).

OPERATIONS SUR LES LIMITES FINIES

CAS GENERAL : THEOREMES GENERAUX

Soit $\lim\limits_{\blacksquare} f = \ell$ et $\lim\limits_{\blacksquare} g = \ell_1$:

$\lim\limits_{\blacksquare}(f+g)$	$\lim\limits_{\blacksquare} f.g$	$\lim\limits_{\blacksquare} \dfrac{f}{g}$ $(*)$	$\lim\limits_{\blacksquare} \lambda f$	$\lim\limits_{\blacksquare} \lvert f \rvert$	$\lim\limits_{\blacksquare} \sqrt{f}$
$\ell + \ell_1$	$\ell.\ell_1$	$\dfrac{\ell}{\ell_1}$ si $\ell_1 \neq 0$	$\lambda\ell$	$\lvert\ell\rvert$	$\sqrt{\ell}$ si $\ell > 0$

$*$ Le cas $\ell_1 = 0$, sera vu plus loin, dans les indéterminations.

Dans le dernier cas, si $\ell = 0$, $\lim\limits_{\blacksquare} \sqrt{f} = 0$ si f reste positive dans l'intersection de D_f et d'un voisinage de $\blacksquare$ (sinon $\sqrt{f}$ n'existe pas).

Cas particuliers

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{\blacksquare} f^n = \ell^n$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \neq 0$, $\lim\limits_{\blacksquare} \dfrac{1}{f^n} = \dfrac{1}{\ell^n}$; donc, si $\ell \neq 0$, $\lim\limits_{\blacksquare} \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\ell}$.

D'après la définition de limite, appliquée à $\ell = 0$, on a le résultat suivant :

$$\boxed{\lim_{\blacksquare} f = 0 \iff \lim_{\blacksquare} \lvert f \rvert = 0}$$

CAS D'INDETERMINATION

Ce sont les cas où l'on ne peut pas appliquer les théorèmes généraux, car l'opération sur les limites n'est pas possible.

- Si $\lim\limits_{\blacksquare} f = 0$ et $\lim\limits_{\blacksquare} g = 0$, $\lim\limits_{\blacksquare} \dfrac{f}{g}$ se présente sous la forme indéterminée « $\dfrac{0}{0}$ ».

AUTRES CAS

a) Si $\ell \neq 0$ et $\ell_1 = 0$; soit g garde un signe constant et la limite de $\dfrac{f}{g}$ est égale à l'infini avec le signe du quotient, sinon il n'y a pas de limite.

b) Si $f(x) > 0$ quand $x \to \blacksquare$, $x \neq \blacksquare$, et si $\lim\limits_{\blacksquare} f = 0$, alors $\lim\limits_{\blacksquare} \dfrac{1}{f} = +\infty$.

c) Si $f(x) < 0$ quand $x \to \blacksquare$, $x \neq \blacksquare$, et si $\lim\limits_{\blacksquare} f = 0$, alors $\lim\limits_{\blacksquare} \dfrac{1}{f} = -\infty$.

d) Si $\lim\limits_{\blacksquare} f(x) = 0$ et si f ne s'annule pas sur un voisinage de $\blacksquare$, alors $\lim\limits_{\blacksquare} \dfrac{1}{|f|} = +\infty$.

OPERATIONS SUR LES LIMITES INFINIES

Tableau des résultats : voir page suivante.

Dans les cas « $\dfrac{\infty}{0}$ », marqués d'un astérisque, on ne peut pas conclure de manière générale ; il faut regarder le signe de g : si g garde un signe constant, la limite de $\dfrac{f}{g}$ est infinie.

Indéterminations :

Le tableau suivant fait apparaître 3 cas d'indétermination.

Indétermination « $\infty - \infty$ » ; « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ; « $0 \times \infty$ ».

Opérations sur les limites infinies

ℓ représente un nombre réel.

$\lim_{\blacksquare} f$	$\lim_{\blacksquare} g$	$\lim_{\blacksquare}(f+g)$	$\lim_{\blacksquare}(f.g)$	$\lim_{\blacksquare}\left(\frac{f}{g}\right)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$+\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$+\infty$	IND	$-\infty$	IND
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$\ell > 0, +\infty$ $\ell < 0, -\infty$ $\ell = 0$ IND	0
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$\ell > 0, -\infty$ $\ell < 0, +\infty$ $\ell = 0$ IND	0
$+\infty$	ℓ	$+\infty$	$\ell > 0, +\infty$ $\ell < 0, -\infty$ $\ell = 0$ IND	$\ell > 0, +\infty$ $\ell < 0, -\infty$ $\ell = 0$ $*$
$-\infty$	ℓ	$-\infty$	$\ell > 0, -\infty$ $\ell < 0, +\infty$ $\ell = 0$ IND	$\ell > 0, -\infty$ $\ell < 0, +\infty$ $\ell = 0$ $*$

Remarque : Pour les cas marqués d'un astérisque, voir les résultats de la page précédente.

AUTRES TYPE D'INDETERMINATION

Type « 0^0 » .

C'est le cas de $u(x)^{v(x)}$ où $u(x) > 0$ sur un voisinage de $\blacksquare$ (car $u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)\ln(u_x))}$ ce qui exige $u(x) > 0$) et $\lim_{\blacksquare} u = \lim_{\blacksquare} v = 0$. L'exposant se présente sous la forme indéterminée « $0 \times \infty$ » .

Type « $1^{+\infty}$ » .

C'est encore le cas $u(x)^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)\ln(u(x))}$, car l'exposant se présente sous la forme indéterminée « $\infty \times 0$ » .

METHODES POUR LEVER LES INDETERMINATIONS

a) Utiliser les propriétés des équivalents ou des fonctions négligeables devant d'autres (voir paragraphes suivants)

b) Penser aux développements limités, qui permettent de remplacer des expressions par d'autres expressions égales.

c) Connaître les formules suivantes (qui sont des équivalences ou négligeabilités classiques)

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0)$

$\lim_{x \to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0 \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0)$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, la valeur absolue n'est pas nécessaire.

$\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0 \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{R},\ \beta > 0)$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, la valeur absolue n'est pas nécessaire.

Exemples :

- $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^3 - 8}$ est une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} &= \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x^3-8)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \frac{1}{(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)} \end{aligned}$$

a pour limite $\frac{1}{48}$ en 2.

- $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+1} - 2x)$ est du type « $\infty - \infty$ ».

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2+1} - 2x) &= \left(\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} - 2x\right) \\ &= x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} - 2\right) \end{aligned}$$

(car $\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = |x|(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}) = x(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}})$ quand $x > 0$)

a pour limite $-\infty$ en $+\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ est du type « $1^{+\infty}$ ».

$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp x \ln(1+\frac{1}{x})$; $\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, donc $x\ln(1+\frac{1}{x}) \underset{+\infty}{\sim} 1$, ce qui implique $\lim_{x \to +\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = 1$.

Par composition des limites , $\lim_{x \to +\infty} \exp x\ln(1+\frac{1}{x}) = e^1 = e$ et $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

COMPATIBILITE AVEC L'ORDRE

Soit f une fonction définie au voisinage de $\blacksquare$, sauf peut-être en $\blacksquare$. Supposons $f(x) \geq 0$ sur ce voisinage. Alors $(\lim_{\blacksquare} f = \ell) \Longrightarrow \ell \geq 0$

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $\blacksquare$, sauf peut-être en $\blacksquare$. Supposons $f(x) \leq g(x)$ sur ce voisinage. Alors

$(\lim_{\blacksquare} f = \ell$ et $\lim_{\blacksquare} g = \ell') \Longrightarrow \ell \leq \ell'$