



RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES



ANALYSE

FONCTIONS REELLES

FONCTIONS REELLES

PARITE

DEFINITION : Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et D_f son ensemble de définition.

On dit que f est paire si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.

On dit que f est impaire si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Si on représente \mathbb{R} par un axe (O, \vec{i}) , pour une fonction paire, comme pour une fonction impaire, D_f est symétrique par rapport à O .

Incidences sur la représentation graphique : pour une fonction paire, la courbe représentative C_f , construite dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) (orthogonal) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (O, \vec{j}) . Pour une fonction impaire, la courbe représentative C_f , est symétrique par rapport à l'origine O .

PERIODICITE

DEFINITION : Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On dit que f est périodique s'il existe un nombre réel $T > 0$ tel que

$$\forall x \in D_f, (x+T) \in D_f, (x-T) \in D_f \text{ et } f(x+T) = f(x).$$

La période est le plus petit réel $T > 0$, s'il existe, satisfaisant aux conditions précédentes.

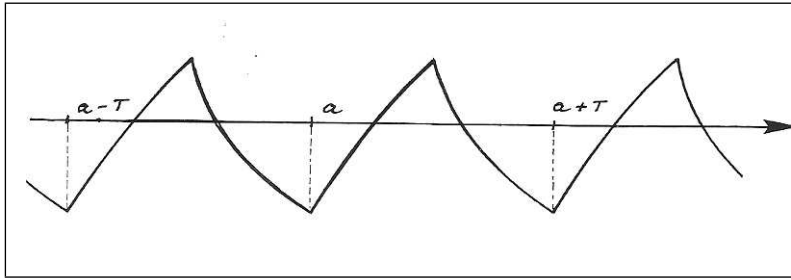
Interprétations géométriques

On représente \mathbb{R} par un axe (O, \vec{i}) . D_f est invariant par la translation de vecteur $kT\vec{i}$ où $k \in \mathbb{Z}^*$. La courbe C_f représentative de f est aussi invariante par cette translation.

Incidence sur la représentation graphique :

Il suffit d'étudier f sur un ensemble $[a, a+T] \cap D_f$, puis d'effectuer les translations de vecteurs $T\vec{i}$ et $-T\vec{i}$, et plus généralement les translations de vecteurs $kT\vec{i}$, où $k \in \mathbb{Z}^*$.

2 Fonctions réelles



FONCTION BORNEE

FONCTION MAJOREE

DEFINITION : Une fonction f définie sur une partie D_f de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} est majorée sur D_f si et seulement si

$$\exists B \in \mathbb{R} / \forall x \in D_f, f(x) \leq B.$$

B ne doit évidemment pas dépendre de x . On dit que B est un majorant de f sur D_f .

FONCTION MINOREE

DEFINITION : Une fonction f définie sur une partie D_f de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} est minorée sur D_f si et seulement si

$$\exists A \in \mathbb{R} / \forall x \in D_f, A \leq f(x).$$

A ne doit évidemment pas dépendre de x . On dit que A est un minorant de f sur D_f .

FONCTION BORNEE

DEFINITION : Une fonction f définie sur une partie D_f de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} est bornée sur D_f si elle est minorée et majorée sur D_f .

$$\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2, (A \leq B) / \forall x \in D_f, A \leq f(x) \leq B.$$

Cela revient à dire que $|f|$ est majorée.

FONCTION MONOTONE

FONCTION CROISSANTE

DEFINITION : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} (non vide et non réduit à un point). On dit que f est croissante au sens large sur I si et seulement si

$$\forall (x, x') \in I^2, x < x' \implies f(x) \leq f(x')$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que f est croissante au sens strict sur I (ou strictement croissante) si

$$\forall (x, x') \in I^2, x < x' \implies f(x) < f(x').$$

FONCTION DECROISSANTE

DEFINITION : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} (non vide et non réduit à un point). On dit que f est décroissante au sens large sur I si et seulement si

$$\forall (x, x') \in I^2, x < x' \implies f(x) \geq f(x')$$

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} . On dit que f est décroissante au sens strict sur I si et seulement si

$$\forall (x, x') \in I^2, x < x' \implies f(x) > f(x')$$

FONCTION MONOTONE

DEFINITION : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} (non vide et non réduit à un point). On dit que f est monotone au sens large (resp au sens strict) sur I si et seulement si f est croissante ou décroissante au sens large (resp au sens strict).

LIMITE

VOISINAGES

DEFINITIONS : On dit qu'une fonction f est définie au voisinage de x_0 s'il existe un intervalle fermé, de centre x_0 , de rayon $r > 0$ (noté $I(x_0, r)$) inclus dans D_f (ensemble de définition de f), c'est-à-dire $\exists r > 0 / I(x_0, r) \subset D_f$.

On dit que f est définie au voisinage de x_0 , sauf peut-être en x_0 , s'il existe un intervalle fermé, de centre x_0 , de rayon $r > 0$ (noté $I(x_0, r)$) tel que $(I(x_0, r) - \{x_0\}) \subset D_f$.

Cela n'interdit pas à f d'être définie en x_0 .

VOISINAGE A DROITE, A GAUCHE

DEFINITIONS : On dit que f est définie à droite de x_0 s'il existe $r > 0$ tel que $[x_0, x_0 + r] \subset D_f$.

On dit que f est définie à droite de x_0 , sauf peut-être en x_0 , s'il existe $r > 0$ tel que $]x_0, x_0 + r] \subset D_f$.

On dit que f est définie à gauche de x_0 s'il existe $r > 0$ tel que $[x_0 - r, x_0] \subset D_f$.

On dit que f est définie à gauche de x_0 , sauf peut-être en x_0 , s'il existe $r > 0$ tel que $[x_0 - r, x_0[\subset D_f$.

LIMITE REELLE EN UN POINT

DEFINITION : Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 sauf peut-être en x_0 et ℓ est un nombre réel. On dit que ℓ est limite de f en x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in I(x_0, \alpha) \cap D_f, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

On peut traduire cette proposition de manière équivalente par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f, (|x - x_0| \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon).$$

Ecritures permises :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell, \text{ ou } \lim_{x_0} f = \ell$$

4 Limite

UNICITE DE LA LIMITE : Si une fonction réelle f admet en un point x_0 une limite réelle ℓ , cette limite est unique.

Cas où x_0 est dans D_f

Si f admet une limite ℓ en x_0 , alors $\ell = f(x_0)$.

LIMITE A DROITE, A GAUCHE

DEFINITIONS : Soit f une fonction réelle définie à droite de x_0 , sauf peut-être en x_0 , et soit un réel ℓ . On dit que ℓ est limite de f en x_0 à droite si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f \cap]x_0, x_0 + \alpha] , |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

ou
$$\forall x \in D_f, (0 < x - x_0 \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Écritures permises :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell, \lim_{x_0^+} f = \ell, \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

Soit f une fonction réelle définie à gauche de x_0 , sauf peut-être en x_0 , et soit un réel ℓ . On dit que ℓ est limite de f en x_0 à gauche si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f \cap [x_0 - \alpha, x_0[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

ou
$$\forall x \in D_f, (0 < x_0 - x \leq \alpha \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon)$$

Écritures permises :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell, \lim_{x_0^-} f = \ell, \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \ell.$$

CRITERE

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 , sauf peut-être en x_0 .

f admet en x_0 une limite réelle si et seulement si f admet une limite réelle en x_0 à droite et à gauche et ces deux limites sont égales.

Si, de plus, f est définie en x_0 , la valeur commune de ces deux limites est $f(x_0)$.

Remarque : Si f admet en x_0 des limites à droite et à gauche différentes, alors f n'a pas de limite en x_0

LIMITE INFINIE

DEFINITIONS : On dit qu'une fonction f , définie au voisinage d'un point x_0 , sauf en x_0 , a pour limite $+\infty$ en x_0 si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f \cap I(x_0, \alpha), f(x) \geq A$$

Les écritures permises sont les mêmes, il suffit de changer la lettre ℓ en $+\infty$.

On dit qu'une fonction f , définie au voisinage d'un point x_0 , sauf en x_0 a pour limite

$-\infty$ si

page 4

Jean MALET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f \cap I(x_0, \alpha), f(x) \leq B$$

Limite à droite = +∞ :

$$\lim_{x_0^+} f = +\infty \iff$$

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f \cap]x_0, x_0 + \alpha], f(x) \geq A$$

Limite à droite = -∞

$$\lim_{x_0^+} f = -\infty \iff$$

$$\forall B \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 / \forall x \in D_f \cap]x_0, x_0 + \alpha], f(x) \leq B$$

Nous laissons aux lecteurs le soin de donner les définitions des limites à gauche.

CRITERE DE LIMITE

Soit f une fonction définie au voisinage d'un nombre réel x_0 , sauf peut-être en x_0 .

- 1) f admet en x_0 une limite si et seulement si f admet des limites à droite et à gauche égales.
- 2) Si $f(x_0)$ existe, ces deux limites doivent être égales à $f(x_0)$.

CRITERE DE NON LIMITE

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 , sauf peut-être en x_0 . f n'admet pas de limite en x_0 si et seulement si

- 1) f n'a pas de limite en x_0 à droite ou à gauche ou
- 2) f admet des limites en x_0 à droite et à gauche : deux cas sont alors à envisager :
 - 1^{er} cas : $f(x_0)$ existe et l'une des deux limites est différente de $f(x_0)$.
 - 2^{ème} cas : $f(x_0)$ n'existe pas et les deux limites sont différentes.

LIMITE EN L'INFINI

DEFINITIONS : Soit f définie sur $[a, +\infty[$, où a est un réel.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A \geq a, / \forall x \in [A, +\infty[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \iff \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \geq a, / \forall x \in [A, +\infty[, f(x) \geq B.$$

$$\lim_{+\infty} f = -\infty \iff \forall B \in \mathbb{R}, \exists A \geq a, / \forall x \in [A, +\infty[, f(x) \leq B.$$

FONCTIONS MONOTONES BORNEES

THEOREME : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [a, b[$ ou $]a, b[$ ($a < b$) à valeurs dans \mathbb{R} . Si f est croissante et majorée (respectivement décroissante et minorée), alors f admet en b une limite finie.

Le résultat est le même si $b = +\infty$ ou $a = -\infty$.

Nous laissons le soin aux lecteurs d'établir le théorème correspondant lorsque $x \rightarrow a$.

Nous laissons le soin aux lecteurs de donner les définitions correspondant au cas où $x \rightarrow -\infty$.

OPERATIONS SUR LES LIMITES

Convention d'écriture : Les résultats seront valables lorsque $x \rightarrow x_0$ ou $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$. Pour ne pas répéter des énoncés semblables, nous écrirons de manière générale $\lim_{\blacksquare} f$ ($x \rightarrow \blacksquare$ voudra dire $x \rightarrow x_0$ ou $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$).

OPERATIONS SUR LES LIMITES FINIES

CAS GENERAL : THEOREMES GENERAUX

Soit $\lim_{\blacksquare} f = \ell$ et $\lim_{\blacksquare} g = \ell_1$:

$\lim_{\blacksquare} (f + g)$	$\lim_{\blacksquare} f \cdot g$	$\lim_{\blacksquare} \frac{f}{g}$ (*)	$\lim_{\blacksquare} \lambda f$	$\lim_{\blacksquare} f $	$\lim_{\blacksquare} \sqrt{f}$
$\ell + \ell_1$	$\ell \cdot \ell_1$	$\frac{\ell}{\ell_1}$ si $\ell_1 \neq 0$	$\lambda \ell$	$ \ell $	$\sqrt{\ell}$ si $\ell > 0$

* Le cas $\ell_1 = 0$, sera vu plus loin, dans les indéterminations.

Dans le dernier cas, si $\ell = 0$, $\lim_{\blacksquare} \sqrt{f} = 0$ si f reste positive dans l'intersection de D_f et d'un voisinage de \blacksquare (sinon \sqrt{f} n'existe pas).

Cas particuliers

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{\blacksquare} f^n = \ell^n$.

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \neq 0$, $\lim_{\blacksquare} \frac{1}{f^n} = \frac{1}{\ell^n}$; donc, si $\ell \neq 0$, $\lim_{\blacksquare} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$.

D'après la définition de limite, appliquée à $\ell = 0$, on a le résultat suivant :

$$\lim_{\blacksquare} f = 0 \iff \lim_{\blacksquare} |f| = 0$$

CAS D'INDETERMINATION

Ce sont les cas où l'on ne peut pas appliquer les théorèmes généraux, car l'opération sur les limites n'est pas possible.

- Si $\lim_{\blacksquare} f = 0$ et $\lim_{\blacksquare} g = 0$, $\lim_{\blacksquare} \frac{f}{g}$ se présente sous la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ».

AUTRES CAS

- a) Si $\ell \neq 0$ et $\ell_1 = 0$; soit g garde un signe constant et la limite de $\frac{f}{g}$ est égale à l'infini avec le signe du quotient, sinon il n'y a pas de limite.
- b) Si $f(x) > 0$ quand $x \rightarrow \blacksquare$, $x \neq \blacksquare$, et si $\lim_{\blacksquare} f = 0$, alors $\lim_{\blacksquare} \frac{1}{f} = +\infty$.
- c) Si $f(x) < 0$ quand $x \rightarrow \blacksquare$, $x \neq \blacksquare$, et si $\lim_{\blacksquare} f = 0$, alors $\lim_{\blacksquare} \frac{1}{f} = -\infty$.
- d) Si $\lim_{\blacksquare} f(x) = 0$ et si f ne s'annule pas sur un voisinage de \blacksquare , alors $\lim_{\blacksquare} \frac{1}{|f|} = +\infty$.

OPERATIONS SUR LES LIMITES INFINIES

Tableau des résultats : voir page suivante.

Dans les cas « $\frac{\infty}{0}$ », marqués d'un astérisque, on ne peut pas conclure de manière générale ; il faut regarder le signe de g : si g garde un signe constant, la limite de $\frac{f}{g}$ est infinie.

Indéterminations :

Le tableau suivant fait apparaître 3 cas d'indétermination.

Indétermination « $\infty - \infty$ » ; « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; « $0 \times \infty$ ».

Opérations sur les limites infinies

ℓ représente un nombre réel.

page 7

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

8 Limite

$\lim_{\blacksquare} f$	$\lim_{\blacksquare} g$	$\lim_{\blacksquare}(f + g)$	$\lim_{\blacksquare}(f.g)$	$\lim_{\blacksquare}\left(\frac{f}{g}\right)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$+\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$+\infty$	IND	$-\infty$	IND
ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$\ell > 0, +\infty$ $\ell < 0, -\infty$ $\ell = 0$ IND	0
ℓ	$-\infty$	$-\infty$	$\ell > 0, -\infty$ $\ell < 0, +\infty$ $\ell = 0$ IND	0
$+\infty$	ℓ	$+\infty$	$\ell > 0, +\infty$ $\ell < 0, -\infty$ $\ell = 0$ IND	$\ell > 0, +\infty$ $\ell < 0, -\infty$ $\ell = 0$ *
$-\infty$	ℓ	$-\infty$	$\ell > 0, -\infty$ $\ell < 0, +\infty$ $\ell = 0$ IND	$\ell > 0, -\infty$ $\ell < 0, +\infty$ $\ell = 0$ *

Remarque : Pour les cas marqués d'un astérisque, voir les résultats de la page précédente.

AUTRES TYPE D'INDETERMINATION

Type « 0^0 » .

C'est le cas de $u(x)^{v(x)}$ où $u(x) > 0$ sur un voisinage de \blacksquare (car $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$) ce qui exige $u(x) > 0$) et $\lim_{\blacksquare} u = \lim_{\blacksquare} v = 0$. L'exposant se présente sous la forme indéterminée « $0 \times \infty$ » .

Type « $1^{+\infty}$ » .

C'est encore le cas $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$, car l'exposant se présente sous la forme indéterminée « $\infty \times 0$ » .

METHODES POUR LEVER LES INDETERMINATIONS

- Utiliser les propriétés des équivalents ou des fonctions négligeables devant d'autres (voir paragraphes suivants)
- Penser aux développements limités, qui permettent de remplacer des expressions par d'autres expressions égales.
- Connaître les formules suivantes (qui sont des équivalences ou négligeabilités classiques)

page 8

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0 \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0)$$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, la valeur absolue n'est pas nécessaire.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0 \quad ; \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 0)$$

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, la valeur absolue n'est pas nécessaire.

Exemples :

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^3 - 8}$ est une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ ».

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^3 - 8} &= \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x^3 - 8)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \frac{x - 2}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \frac{1}{(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + 2)} \end{aligned}$$

a pour limite $\frac{1}{48}$ en 2.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - 2x)$ est du type « $\infty - \infty$ ».

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 + 1} - 2x) &= \left(\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x \right) \\ &= x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2 \right) \end{aligned}$$

(car $\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = |x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right) = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$ quand $x > 0$)

a pour limite $-\infty$ en $+\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ est du type « $1^{+\infty}$ ».

$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, donc $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$, ce qui implique $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$.

Par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = e^1 = e$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

COMPATIBILITE AVEC L'ORDRE

Soit f une fonction définie au voisinage de \blacksquare , sauf peut-être en \blacksquare . Supposons $f(x) \geq 0$ sur ce voisinage. Alors $(\lim_{\blacksquare} f = \ell) \implies \ell \geq 0$

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de \blacksquare , sauf peut-être en \blacksquare . Supposons $f(x) \leq g(x)$ sur ce voisinage. Alors

$$(\lim_{\blacksquare} f = \ell \text{ et } \lim_{\blacksquare} g = \ell') \implies \ell \leq \ell'$$

page 9

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

© EDUKLUB SA

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.