RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

SERIES NUMERIQUES

SERIES NUMERIQUES

DEFINITION : *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique. On appelle série de terme général u_n, la* **suite** *dont le terme général est $U_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, appelée suite des sommes partielles.*

Notation : La série de terme général u_n sera notée $(\sum u_n)_{n\geq n_0}$ ou $(\sum u_n)$ (le symbole $\sum$ rappelant que l'on s'intéresse aux sommes partielles) ou $\sum_{n\geq n_0} u_n$.

CONVERGENCE D'UNE SERIE

DEFINITIONS : *La série $(\sum u_n)_{n\geq n_0}$ de terme général u_n est dite convergente si la suite (U_n) des sommes partielles est convergente.*

La série $(\sum u_n)_{n\geq n_0}$ est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Notation, terminologie : Quand une série $(\sum u_n)$ converge, on note $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$

Cette somme s'appelle aussi la somme de la série.

On ne change pas la **nature** d'une série (c'est-à-dire sa convergence ou sa divergence) en supprimant un nombre fini de termes.

CONDITION NECESSAIRE DE CONVERGENCE

Si une série $(\sum u_n)$ converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Z → La réciproque est fausse (penser à la série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$).

Divergence grossière : ((u_n) n'a pas pour limite 0)$\Longrightarrow$ (la série $(\sum u_n)$, de terme général u_n, diverge).

 Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

On dit dans ce cas que la série est grossièrement divergente.

SERIES A TERMES POSITIFS

DEFINITIONS : *Une série de terme général $u_n, (n \geq n_0)$ est à termes positifs si* $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq 0$.

Une série de terme général $u_n, (n \geq n_0)$ est à termes positifs à partir d'un certain rang s'il existe un rang $n_1 \geq n_0$ tel que $\forall n \geq n_1,\ u_n \geq 0$.

CRITERE DE CONVERGENCE

THEOREME : Une série à termes u_n positifs (à partir d'un certain rang) est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.

Elle diverge si et seulement si la suite des sommes partielles a pour limite $+\infty$.

THEOREME DE COMPARAISON

Soit u_n et v_n les termes généraux de séries positives. On suppose qu'il existe un rang n_1 à partir duquel $u_n \leq v_n$.

$\left(\left(\sum v_n\right) \text{ converge }\right) \Longrightarrow \left(\left(\sum u_n\right) \text{ converge}\right)$.

$\left(\left(\sum u_n\right) \text{ diverge }\right) \Longrightarrow \left(\left(\sum v_n\right) \text{ diverge}\right)$.

THEOREME D'EQUIVALENCE

Soit deux séries de termes généraux u_n et v_n positifs.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ sont de même nature.

Même résultat si les séries $\left(\sum u_n\right)$ et $\left(\sum v_n\right)$ sont à termes négatifs.

NEGLIGEABILITE

Soit deux séries de termes généraux u_n et v_n positifs.

Si $u_n \underset{+\infty}{=} \circ(v_n)$ et si la série $\left(\sum v_n\right)$ converge, alors la série $\left(\sum u_n\right)$ converge