RESUME DU COURS DE MATHEMATIQUES

ANALYSE

INTEGRATION

PRIMITIVES
INTEGRATION

PRIMITIVES

DEFINITION : *Soit F et f deux applications d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point, dans $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f sur I, si $F' = f$.*

THEOREME : Toute fonction, définie, continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet une primitive sur I.

PROPOSITION : Soit f est une application continue sur I et F une primitive de f sur I. Alors toutes les primitives de f sont de la forme $G : x \longmapsto F(x) + k \ / \ k \in \mathbb{R}$.

Unicité de la primitive prenant en un point donné une valeur donnée

Soit F une primitive de f, application continue sur I. Considérons un point x_0 de I et une valeur réelle quelconque y_0. Alors il existe une unique primitive de f sur I qui prend en x_0 la valeur y_0 : c'est l'application $x \longmapsto F(x) - F(x_0) + y_0$.

Notation : La primitive de f qui s'annule en x_0 se note $x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

$$\textbf{On a donc } \forall x \in I, \quad F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

OPERATIONS

Si f et g sont deux applications continues sur un intervalle I et F et G deux primitives de f et g respectivement. Alors

- $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, λF est une primitive de λf.
- Si f et g sont dérivables sur I, alors fg est une primitive de $fg' + f'g$.

Jean MALLET et Michel MITERNIQUE

• Si u est une application dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et **à valeurs dans** J ,, f est une application dérivable sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ alors $f \circ u$ est une primitive de $f' \circ u \times u'$.

PRIMITIVES USUELLES

Tableau des différents résultats

Fonctions	Primitives
x^n où $n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\vert x\vert + C$
$\sum_{k=0}^{k=n} a_k x^k$	$\sum_{k=0}^{k=n} a_k \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C$
e^x	$e^x + C$
x^α où $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
a^x où $a > 0$, $a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$

INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN SEGMENT

Soit f une application continue sur un segment $[a, b], (a \leq b)$,

DEFINITION : *On appelle intégrale (ou intégrale de Riemann) de f sur $[a, b]$ le nombre réel $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ où F est une primitive quelconque de f sur $[a, b]$. On dira alors que f est intégrable sur $[a, b]$.*

C'est la formule fondamentale du calcul intégral.

PROPRIETES

RELATION DE CHASLES : Soit f une fonction continue sur un intervalle non vide I et non réduit à un point, et x, y, z trois éléments de I :

$$\int_x^z f(t)dt = \int_x^y f(t)dt + \int_y^z f(t)dt.$$

LINEARITE DE L'INTEGRATION

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle non vide I, λ et μ deux réels quelconques. Alors

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$